

<http://matwo.fr/ensam>

INGÉNIEUR ARTS ET MÉTIERS
ÉNERGÉTIQUE INTERMÉDIAIRE
Mécanique des Fluides
version du 11 septembre 2023

Thibaud MARCEL-MATHEY
Thibaud.MARCEL-MATHEY@ensam.eu

1	Méetrologie	15
1.1	Mesure de pression	16
1.1.1	Manomètres en U	16
1.1.2	Manomètre à tube incliné	16
1.1.3	Manomètre à tube de Bourdon	17
1.2	Mesure de débit et de vitesse	18
1.2.1	Manche à air	18
1.2.2	Anémomètre à coupelles	18
1.2.3	Tube de Pitot	19
1.2.4	Tube de Venturi	19
1.2.5	Diaphragme	20
1.2.6	Rotamètre	20
1.2.7	Débitmètre à effet vortex	21
1.2.8	Anémomètre fil chaud	21
1.3	Mesure d'un champ de vitesse par PIV	22
2	Statique des fluides	25
	Introduction	25
2.1	Notion de pression	26
2.2	Équation fondamentale de la statique des fluides	27
2.3	Action des forces de pression sur une paroi	29
2.4	Théorème d'Archimède	30

3 Cinématique	33
3.1 Vocabulaire	34
3.1.1 Ligne de courant	34
3.1.2 Trajectoire	35
3.2 Flux généralisé	36
3.2.1 Débit volumique	36
3.2.2 Débit massique	36
3.3 Stationnaire, instationnaire, permanent, transitoire	37
3.3.1 Zoom sur les allées tourbillonnaires de von Kàrmàn	38
3.3.2 Fréquences caractéristiques	39
3.3.3 Impact sur la traînée et la portance	40
3.4 Système de coordonnées en mécanique des fluides	43
3.4.1 Descriptions Lagrangiennes et Euleriennes	43
3.4.2 Dérivée particulaire	43
4 Dynamique des fluides en fluide parfait	45
4.1 Fluide parfait	46
4.2 Équation d'Euler	46
4.3 Équation de continuité	47
4.4 Théorème de Bernoulli	48
4.4.1 Formulation du théorème de Bernoulli pour un fluide parfait	48
4.5 Formule de Torricelli	50
4.6 Notion de point d'arrêt	52
4.7 Tube de Pitot	53
4.8 Tube de Venturi	54
5 Rhéologie	57
5.1 Phénoménologie	58
5.2 Caractérisation des fluides newtoniens	59
5.3 Fluides newtoniens et phénomènes visqueux	60
5.3.1 Couche limite	60
5.3.2 Point de décollement	61

6	Dynamique des fluides en fluide visqueux	63
6.1	Équation de Navier-Stokes	63
6.2	Régimes d'écoulement	64
6.2.1	Régime laminaire	65
6.2.2	Régime turbulent	65
6.2.3	Régimes laminaires et turbulents dans une conduite	66
6.3	Nombre de Reynolds	66
6.4	Notion de pertes de charges	67
6.5	Pertes de charges linéaires	68
6.6	Pertes de charges singulières	71
7	Machines fluides	73
7.1	Classification des machines fluides	74
7.1.1	Machines volumétriques	74
7.1.2	Turbomachines	75
7.2	Dimensionnement d'une turbomachine	76
7.2.1	Caractérisation de la turbomachine : hauteur manométrique	76
7.2.2	Caractérisation du réseau	78
7.2.3	Interaction entre turbomachine et réseau : point de fonctionnement	79
7.2.4	Ordres de grandeur des puissances de pompes	80
7.3	Couplage de machines fluides	81
7.3.1	Couplage en série de deux pompes identiques	81
7.3.2	Couplage en parallèle de deux pompes identiques	82
8	Similitudes et analyse dimensionnelle	83
8.1	Unités et système international	84
8.1.1	Unités du système international	84
8.1.2	Unités fondamentales du système international	84
8.2	Dépendance dimensionnelle	85
8.3	Nombre de grandeurs dimensionnellement indépendantes	87
8.4	Théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème des II)	87
8.4.1	Théorème	87
8.4.2	Détermination des produits adimensionnels II	88
8.5	Bilan de l'analyse dimensionnelle	91
8.6	Similitudes	91
8.6.1	Définition	91

8.6.2	Application	91
8.7	Limitations	92
8.7.1	Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes	92
8.7.2	Similitudes partielles	94

Nombres adimensionnels

γ rapport des capacités calorifiques massiques à pression et à volume constants ($\gamma_{\text{air}} = 1,4$)

Eu nombre d'Euler = $\frac{p - p_{\text{ref.}}}{\rho U_{\text{ref.}}^2}$

Fr nombre de Froude = $\frac{U_{\text{ref.}}}{\sqrt{g L_{\text{ref.}}}}$ ou = $\frac{U_{\text{ref.}}^2}{g L_{\text{ref.}}}$

Ma nombre de Mach = $\frac{U_{\text{ref.}}}{c}$

Nu nombre de Nusselt = $\frac{h L_{\text{ref.}}}{\lambda_{\text{fluide}}}$

Pr nombre de Prandtl = $\frac{\mu c_p}{\lambda_{\text{fluide}}} = \frac{\nu}{\alpha}$

Re nombre de Reynolds = $\frac{U_{\text{ref.}} L_{\text{ref.}}}{\nu}$

Sr nombre de Strouhal = $\frac{f L_{\text{ref.}}}{U_{\text{ref.}}} = \frac{\omega L_{\text{ref.}}}{2\pi U_{\text{ref.}}}$

We nombre de Weber = $\frac{\rho U_{\text{ref.}}^2 L_{\text{ref.}}}{Y}$

C_D coefficient de traînée (*drag*) = $\frac{2 F_D}{\rho d_{\text{ref.}} U_{\text{ref.}}^2 l}$

C_L coefficient de portance (*lift*) = $\frac{2 F_L}{\rho d_{\text{ref.}} U_{\text{ref.}}^2 l}$

C_p coefficient de pression = $2 \frac{p - p_{\text{ref.}}}{\rho U_{\text{ref.}}^2} = 2 \text{ Eu}$

Notations grecques

δ	épaisseur de la couche limite
λ_c	conductivité thermique
λ	coefficient de perte de charge linéique (régulière)
μ	viscosité dynamique du fluide
ν	viscosité cinématique du fluide ($\mu = \rho \nu$)
Ω_i	$i^{\text{ème}}$ composante de la vortacité $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U}$
Π	poussée d'Archimède ou groupements adimensionnels
χ	coefficient de compressibilité
ρ	masse volumique du fluide
$\bar{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses
ξ, ζ	coefficient de perte de charge ponctuelle (ou singulière)

Notations latines

a	diffusivité thermique = $\frac{\lambda_c}{\rho c_p}$
c	vitesse du son (dans un gaz parfait = $\sqrt{\gamma r T}$)
d	densité d'un fluide = $\frac{\rho}{\rho_{ref.}}$
D_h	diamètre hydraulique
g	accélération de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$)
R	constante universelle des gaz parfaits ($R = 8,314472 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
r, r^s	constante spécifique du gaz ($r_{air} = 287,058 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
$c_p (c_v)$	capacité calorifique massique à pression constante (resp. massique à volume constant)
E	charge (en Pa)
h	coefficient d'échange convectif (ou de convection)
H	hauteur (si associée à une pression, en mCE ou mHg)
$L_{ref.}$	longueur de référence (D_h en hydraulique)
$p_{atm.}$	pression atmosphérique ($p_{atm.} = 101325 \text{ Pa}$ au niveau de la mer)
$p_{v,sat.}$	pression de vapeur saturante
$q_m (q_v)$	débit massique (resp. volumique)
Q	critère « Q » = $\frac{1}{2} [\ R\ ^2 - \ S\ ^2]$
R_{ij}	tenseur antisymétrique du taux de déformation ou de rotation = $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right]$
S_{ij}	tenseur symétrique du taux de déformation = $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right]$
S, dS	surface, élément de surface considéré
\vec{U}	vecteur vitesse ($u_i, i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse \vec{U})
$U_{ref.}$	vitesse de référence
V, dV	volume, élément de volume considéré
Y	tension superficielle

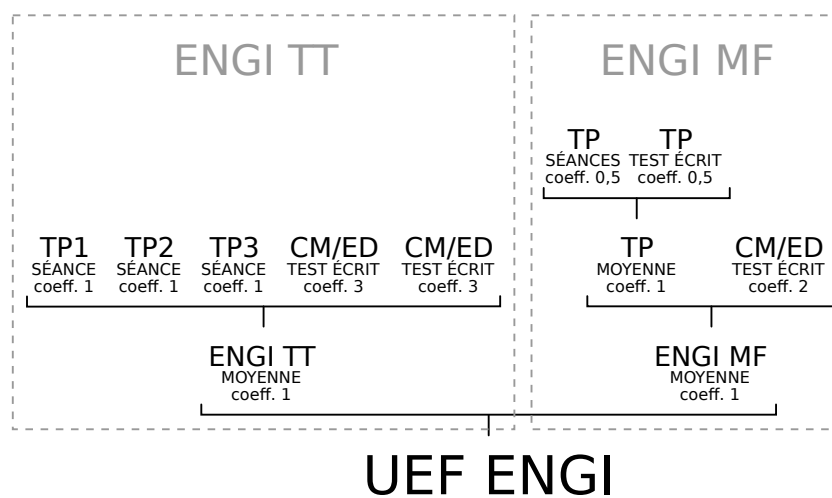
Alphabet grec

alpha	A	α
bêta	B	β
gamma	Γ	γ
dêta	Δ	δ
epsilon	E	ε
zêta	Z	ζ
êta	H	η
thêta	Θ	θ
iota	I	ι
kappa	K	κ
lambda	Λ	λ
mu	M	μ
nu	N	ν
xi	Ξ	ξ
omicron	O	o
pi	Π	π
rho	P	ρ
sigma	Σ	σ
tau	T	τ
upsilon	Y	υ
phi	Φ	ϕ
chi	X	χ
psi	Ψ	ψ
oméga	Ω	ω

Alphabet phonétique de l'OTAN (ou alphabet radio)

A	alpha
B	bravo
C	charlie
D	delta
E	echo
F	foxtrot
G	golf
H	hotel
I	india
J	juliett
K	kilo
L	lima
M	mike
N	november
O	oscar
P	papa
Q	quebec
R	romeo
S	sierra
T	tango
U	uniform
V	victor
W	whiskey
X	x-ray
Y	yankee
Z	zulu

UEF Énergétique Intermédiaire = Transfert Thermique + Mécanique des Fluides



CONTRÔLE CONTINU - TEST Mécanique des Fluides CM+ED

- durée : 1h30 (ou 2h pour les 1/3 temps)
- documents interdits ; vous aurez droit uniquement à une feuille¹ A4 manuscrite recto-verso
- votre calculatrice personnelle est autorisée ; aucune calculatrice ne vous sera fournie.

Programme de l'évaluation

Ensemble des enseignements de Mécanique des Fluides traités avec Thibaud MARCEL-MATHEY ;

- ED : A, B, C, D, E et F
- CM : Chap. I à VIII inclus

Mode d'évaluation

- exercices de type ED (à rédiger) et/ou
- questions de cours (à rédiger) et/ou
- analyse documentaire (à rédiger)

1. 1 feuille = 2 pages

EXAMEN DE REVALIDATION (rattrapage) Mécanique des Fluides

- durée : 45min (ou 1h pour les 1/3 temps)
- documents interdits ; les principales formules seront rappelées dans le sujet
- votre calculatrice personnelle est autorisée ; aucune calculatrice ne vous sera fournie.

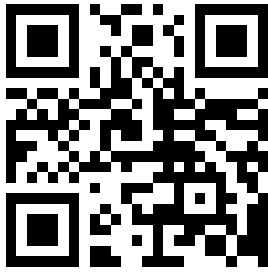
Programme de l'évaluation

Ensemble des enseignements de Mécanique des Fluides traités avec Thibaud MARCEL-MATHEY.

Mode d'évaluation

L'EXAMEN DE REVALIDATION de Mécanique des fluides aura la forme suivante :

- exercices de type ED (à rédiger) et/ou
- questions de cours (à rédiger) et/ou
- analyse documentaire (à rédiger)



<http://matwo.fr/ensam>

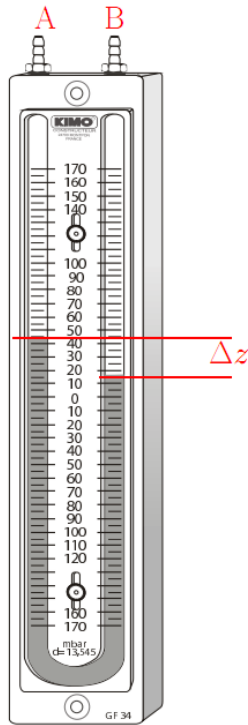
Sommaire

1.1	Mesure de pression	16
1.1.1	Manomètres en U	16
1.1.2	Manomètre à tube incliné	16
1.1.3	Manomètre à tube de Bourdon	17
1.2	Mesure de débit et de vitesse	18
1.2.1	Manche à air	18
1.2.2	Anémomètre à coupelles	18
1.2.3	Tube de Pitot	19
1.2.4	Tube de Venturi	19
1.2.5	Diaphragme	20
1.2.6	Rotamètre	20
1.2.7	Débitmètre à effet vortex	21
1.2.8	Anémomètre fil chaud	21
1.3	Mesure d'un champ de vitesse par PIV	22

La métrologie est la « science des mesures et ses applications ». Elle « comprend tous les aspects théoriques et pratiques des mesurages, quels que soient l'incertitude de mesure et le domaine d'application ».

1.1 Mesure de pression

1.1.1 Manomètres en U



La différence de pression est liée à une différence de hauteur (cf. § 2.2, p. 27) :

$$p_B - p_A = \rho g \Delta z \quad (1.1)$$

C'est un instrument de mesure à **réponse linéaire** qui peut apporter de nombreux avantages.

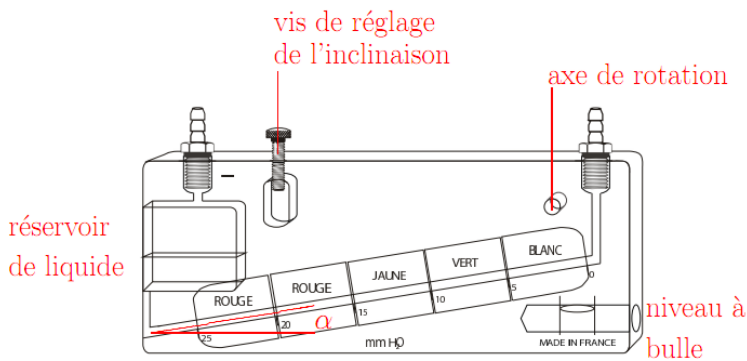
Il est à noter que la valeur de la masse volumique du mercure étant élevée, l'échelle de lecture peut être réduite. Par rapport au même dispositif en eau, l'échelle est réduite d'environ 14 fois.

$$\rho_{\text{Hg}} = 13\,545 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho_{\text{eau}} = 1\,000 \text{ kg.m}^{-3} \text{ à } 4^\circ\text{C}$$

FIGURE 1.1 – Manomètres en « U »

1.1.2 Manomètre à tube incliné



Par définition de la tangente :

$$\Delta z = \tan \alpha \Delta L \quad (1.2)$$

Grâce à cette inclinaison, la variation de L devient plus importante que celle de z ce qui augmente la précision de lecture. En contrepartie, pour que la relation reste vérifiée, il faut que le dispositif soit horizontal. Un niveau à bulle munit d'une vis de réglage permettent d'en assurer la parfaite horizontalité.

FIGURE 1.2 – Manomètre à tube incliné

Il est à noter que nous retrouvons souvent ces types de manomètres en Génie climatique, notamment pour mesurer l'encrassement des filtres à air dans les Centrales de Traitement d'Air (CTA). En effet, plus le filtre sera encrassé, plus il provoquera une perte de charge importante, et plus la chute de pression lue sur le manomètre sera grande (cf. Fig. 1.3, p. 17).

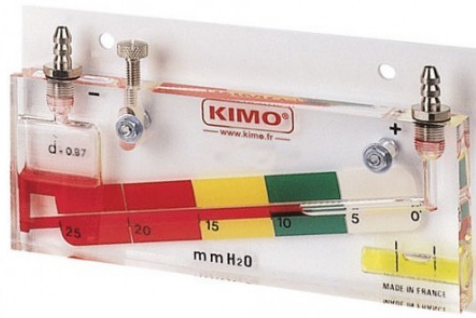


FIGURE 1.3 – Manomètre KIMO® destiné à mesurer l’encrassement des filtres à air d’une CTA. La zone verte signifie que le filtre est peu encrassé (perte de charge, donc chute de pression faible), alors que la zone rouge signifie que l’encrassement est trop important et que le filtre doit être changé.

1.1.3 Manomètre à tube de Bourdon

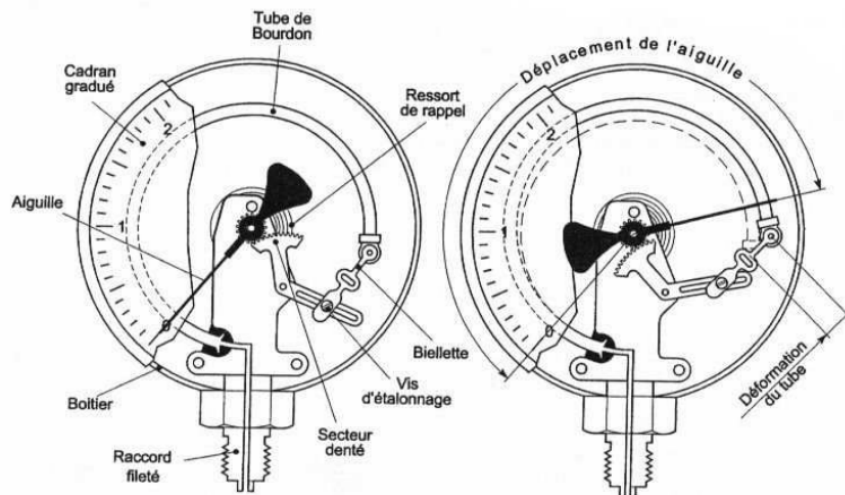


FIGURE 1.4 – Manomètre à tube de Bourdon

Le tube de Bourdon¹ est un tube aplati qui se déroule et s’enroule avec les variations de pression. Via le bras de levier, son état d’enroulement est traduit en information de pression par l’aiguille. L’aiguille évolue généralement dans un bain de glycérine pour absorber les vibrations dues aux petites fluctuations de pression.

1.  FR Eugène BOURDON, 1808-1884

1.2 Mesure de débit et de vitesse

1.2.1 Manche à air

La manche à air (ou manche à vent, *windsock*), est un dispositif qui permet d'estimer la vitesse du vent et d'en indiquer la direction. Un manchon conique, attaché à un mât, comporte 5 anneaux alternant 3 rouges et 2 blancs. Il est soulevé dans la direction du vent, et pointe dans le sens opposé (petit diamètre dirigé vers le SUD pour un vent qui provient du NORD qualifié de « Vent du NORD »).



FIGURE 1.5 – Manche à air

Chaque bande de couleur gonflée par le vent (horizontale) correspond à environ 5 kt (*knots*, nœuds : $1 \text{ kt} \approx 1,8 \text{ km.h}^{-1}$). Le manchon est donc à l'horizontale lorsque le vent souffle à plus de 25 kt soit environ 45 km.h^{-1} .

1.2.2 Anémomètre à coupelles



Ce dispositif nécessite un étalonnage expérimental pour pouvoir obtenir la vitesse de l'écoulement d'air :

$$U = 2 \pi R N f(N) \quad (1.3)$$

Avec :

- U la vitesse de l'écoulement,
- R le rayon moyen des bras,
- N le nombre de tour par seconde,
- $f(N)$ la fonction d'étalonnage.

FIGURE 1.6 – Anémomètre à coupelles

1.2.3 Tube de Pitot

Le tube de Pitot² (ou tube Pitot-statique ou antenne de Prandtl³) est un instrument de mesure de la vitesse relative de l'écoulement par rapport à une paroi solide, largement utilisé dans l'industrie aéronautique et automobile (cf. § 4.7, p. 53).



FIGURE 1.7 – Tube de Pitot

$$U = \sqrt{2 g \Delta h} \quad (1.4)$$

Avec Δh , la différence de hauteur des niveaux de fluide.

1.2.4 Tube de Venturi

Le tube de Venturi⁴ est un dispositif utilisé principalement pour mesurer des débits ou créer des aspirations et des mélanges (cf. § 4.8, p. 54).






FIGURE 1.8 – Tube de Venturi

$$q_v = \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{1/S_B^2 - 1/S_A^2}} \quad (1.5)$$

Avec :

- q_v le débit volumique,
- Δh la différence de hauteur,
- S_B la petite section du venturi,
- S_A la grande section.

2.  FR Henri PITOT, 1695-1771
3.  DE Ludwig PRANDTL, 1875-1953
4.  IT Giovanni Battista VENTURI, 1746-1822

1.2.5 Diaphragme

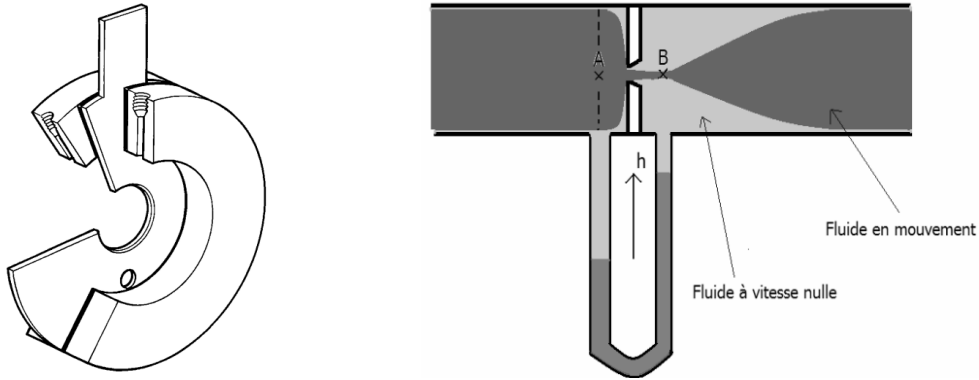


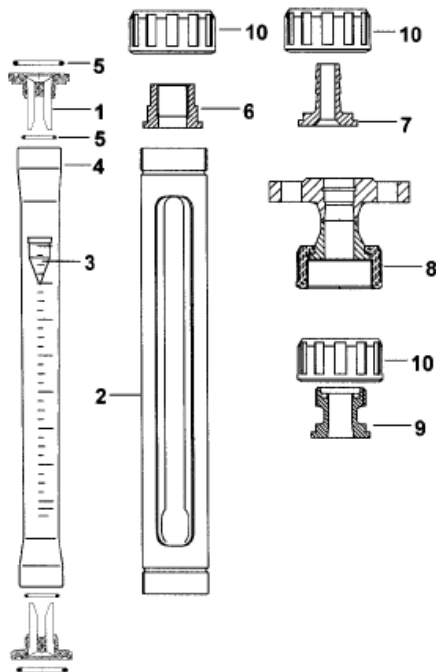
FIGURE 1.9 – Diaphragme fluide

Le diaphragme va localement créer une chute de pression (mesurée à l'aide d'un tube en U) liée à la section s de l'orifice du diaphragme et à la vitesse de l'écoulement, et donc au débit volumique q_v :

$$q_v = s \left\{ \frac{2 \Delta p}{\rho} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]^{-1} \right\}^{0,5} \quad (1.6)$$

avec s et d , la section et le diamètre de l'orifice (S et D la section et le diamètre de la conduite).

1.2.6 Rotamètre



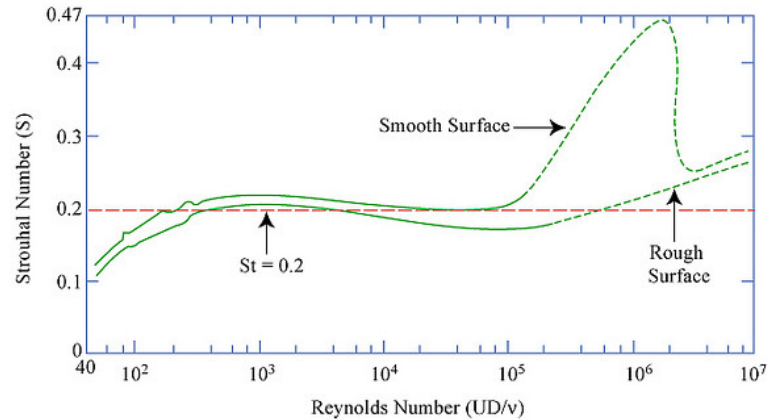
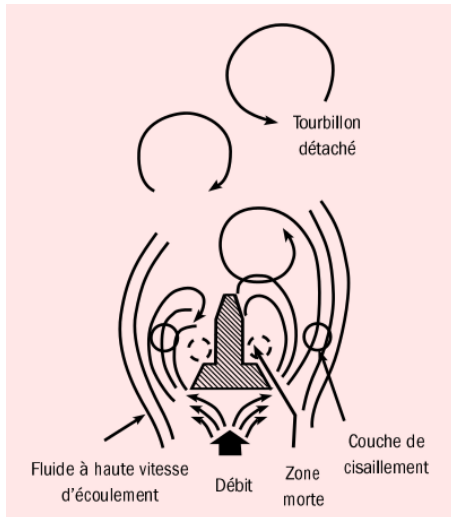
On distingue les éléments suivants :

- 3 **flotteur** strié (animé d'un mouvement de rotation)
- 4 tube transparent gradué
- 1 pièce limitant le déplacement du flotteur (permettre le passage du fluide)
- 2 enveloppe de protection
- 7,8,9,10 connectique

Le tube transparent gradué étant légèrement conique, la section de l'écoulement autour du flotteur est variable en fonction de la hauteur. Le flotteur a donc pour chaque débit donné une position d'équilibre unique.

FIGURE 1.10 – Vue éclatée d'un rotamètre

1.2.7 Débitmètre à effet vortex



Relationship between Strouhal number and Reynolds number for circular cylinders. Data from Lienhard (1966) and Achenbach and Heinecke (1981). $S \sim 0.21 (1 - 21/Re)$ for $40 < Re < 200$, from Roshko (1955).

FIGURE 1.11 – Débitmètre à effet vortex et courbe du Strouhal en fonction du Reynolds

Le principe du débitmètre à effet vortex repose sur la formation de structures cohérentes (allées de von Kàrmàn⁵ (cf. § 3.3.1, p. 38)) derrière un obstacle, et sur le fait que la fréquence adimensionnelle (nombre de Strouhal) de ce lâcher tourbillonnaire est quasi-constante sur une large plage de vitesse adimensionnelle (nombre de Reynolds).

$$St = \frac{f L_{ref.}}{U} \approx 0,2 \Rightarrow \boxed{U \propto f} \quad (1.7)$$

La dimension caractéristique de l'obstacle $L_{ref.}$ étant connue, la mesure de la fréquence du détachement tourbillonnaire nous permet ainsi d'obtenir la vitesse d'écoulement.

1.2.8 Anémomètre fil chaud

C'est un fil métallique chauffé avec un courant électrique qui se refroidit par convection thermique. Via un pont de Wheastone, la mesure du déséquilibre du pont à l'aide d'un voltmètre nous permettra d'obtenir la vitesse d'écoulement (nécessite une calibration).



FIGURE 1.12 – Anémomètre fil chaud

5. HO Theodore von KÀRMÀN, 1881-1963

1.3 Mesure d'un champ de vitesse par PIV

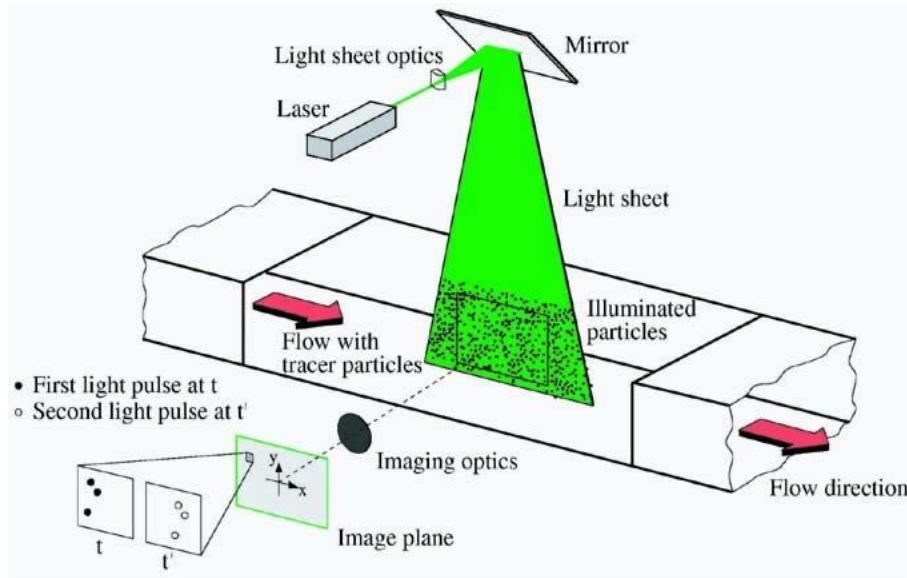


FIGURE 1.13 – Schéma d'un d'un dispositif de PIV

Le dispositif *Particle Image Velocimetry* (PIV) consiste à ensemencer le fluide de particules qui suivent l'écoulement (traceurs, ex. : Rhodamine). Une nappe laser générée dans le plan de mesure va mettre en évidence ces particules qui diffusent la lumière à la traversée de la nappe. Via une caméra rapide, l'enregistrement de doublets d'image et le post-traitement qui s'en suit permettra d'obtenir un champ de vitesse.

À l'heure actuelle, il existe également la TR-PIV (ou PIV résolue en temps) dont la fréquence d'acquisition des champs de vitesse successifs peut aller jusqu'à plusieurs KHz en pleine résolution de la caméra (caméra rapide à capteur CMOS).

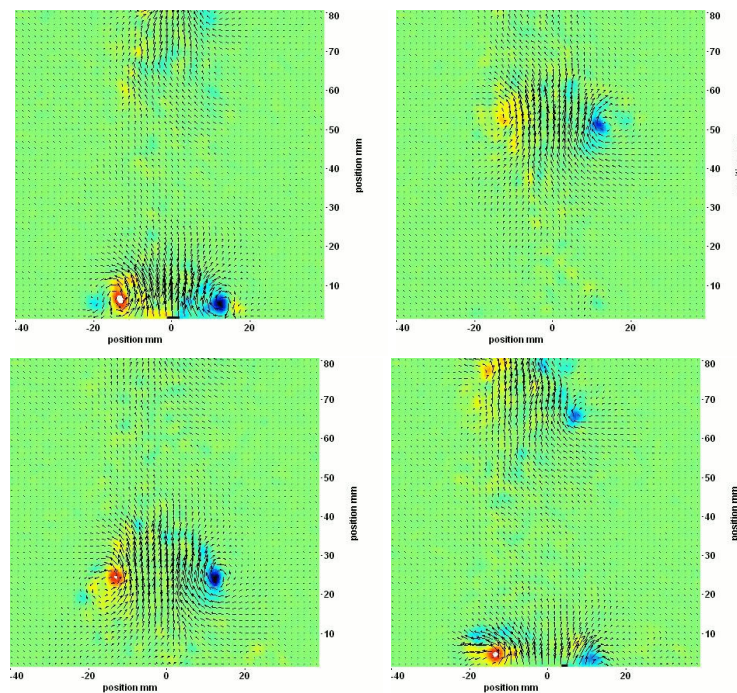


FIGURE 1.14 – TR-PIV : Vorticités et champ de vitesse, Tourbillon torique généré par haut-parleur - Acquisition à 3 KHz, LMFA

Pour la Fig. 1.14, les moyens de mesures suivants ont été utilisés :

- un laser Nd :YLF double cavité, 18mJ@1KHz, fréquence de répétition 0.1-10KHz
- une caméra CMOS, 12 bits, 1280*800 pixels, fréquence de répétition pleine trame 3 KHz
- un système de synchronisation et d'acquisition

De la 3D PIV (*Volumetric Velocimetry*) se développe également en croisant instantanément 2 nappes laser orthogonales.

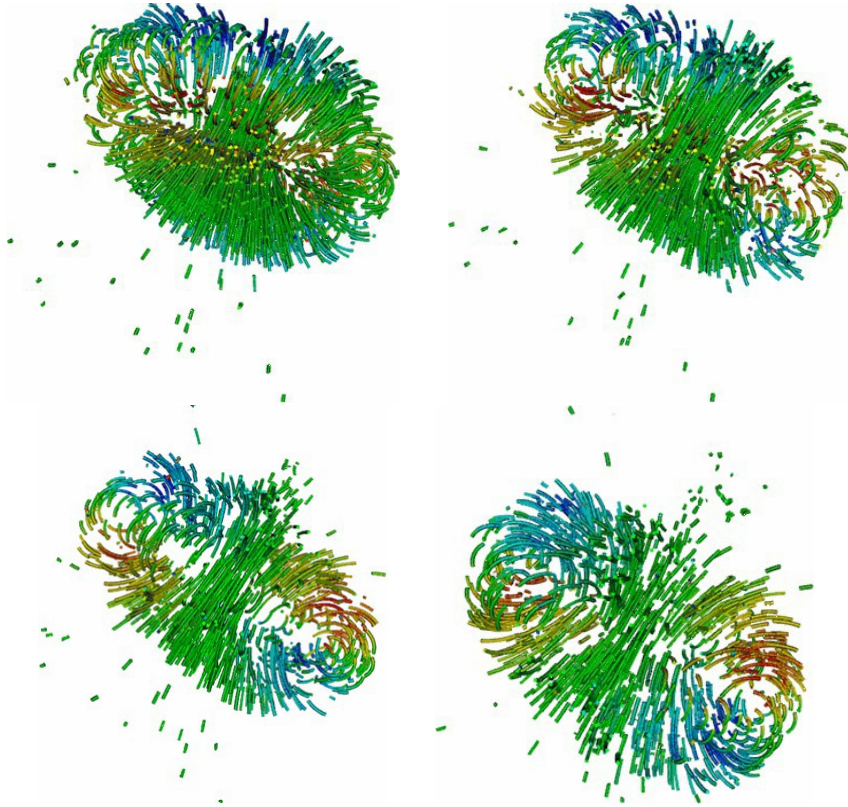


FIGURE 1.15 – 3DPIV : Particle traces from a ring vortex flow field. The colour coding represents the velocity component in the propagation direction of the ring vortex, DANTEC Dynamic



<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

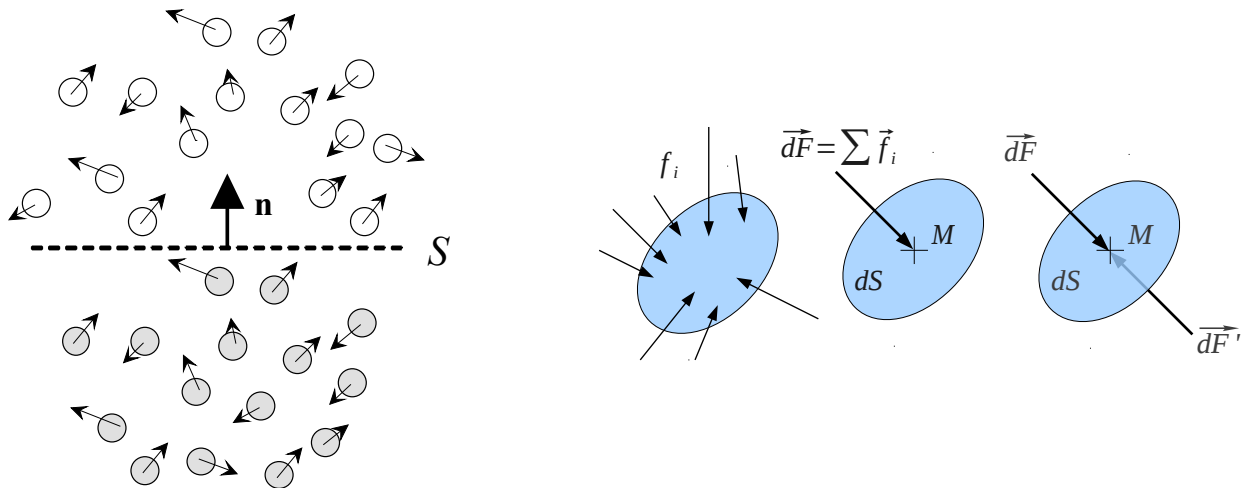
Introduction	25
2.1 Notion de pression	26
2.2 Équation fondamentale de la statique des fluides	27
2.3 Action des forces de pression sur une paroi	29
2.4 Théorème d'Archimède	30

Introduction

- étude des fluides au repos (en équilibre)
- comment définir la pression en tout point d'un fluide au repos?
- qu'est-ce qu'un fluide ? Le sable est-il un fluide ?



2.1 Notion de pression



Fluide enfermé dans une enceinte (poids du fluide négligé)

- forces désordonnées exercées par des molécules \vec{f}_i
- force résultante : $\vec{dF} = \sum \vec{f}_i$
- fluide au repos, dS immobile $\rightarrow \vec{dF}$ normale à la section dS
- il existe \vec{dF}' opposée à \vec{dF}

Définition :

$$p = \left[\frac{dF}{dS} \right]_{dS \rightarrow 0} \quad (2.1)$$

- grandeur **scalaire**
- indépendante de l'orientation de la surface

Équation aux dimensions :

$$[p] = [\text{Pa}] = [\text{N}] \cdot L^{-2} = M \cdot L \cdot T^{-2} \times L^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \quad (2.2)$$

cf. cours sur l'Analyse Dimensionnelle (cf. § 8, p. 83).

$[A] = B$ signifie que l'unité de la grandeur A est homogène à celle de la grandeur B .

- unité du système international : le pascal Pa
- le bar : 1 bar = 10^5 Pa
- l'atmosphère : 1 atm = 101 325 $\approx 10^5$ Pa
- le mètre de colonne d'eau (pour de l'eau à 4°C sous 1 atm) : $1 \text{ mCE} = \rho_{\text{eau}} g \text{ Pa} \approx 10^4 \text{ Pa}$

Les mesures de pression sont généralement données, quelque soit l'unité utilisée, en pression **absolue** ou en pression **relative** (appelée également pression manométrique). La pression absolue a pour référence le zéro absolu qui est la pression qui existerait dans un vide parfait (la plus faible possible), alors que la pression relative prend comme référence la pression atmosphérique. Soient $p_{\text{rel.}}$ la pression relative et p la pression absolue :

$$p = p_{\text{rel.}} + p_{\text{atm.}} \quad (2.3)$$

Attention :

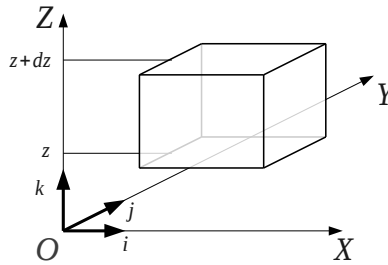
- si un manomètre mesure une pression de 0 à l'air libre, c'est qu'il mesure la pression relative
- il existe la notion de **pression totale** qui est différente de la notion de **pression absolue** (cf. § 4.4.1, p. 48)

$$P = p^* = p + 1/2 \rho U^2$$

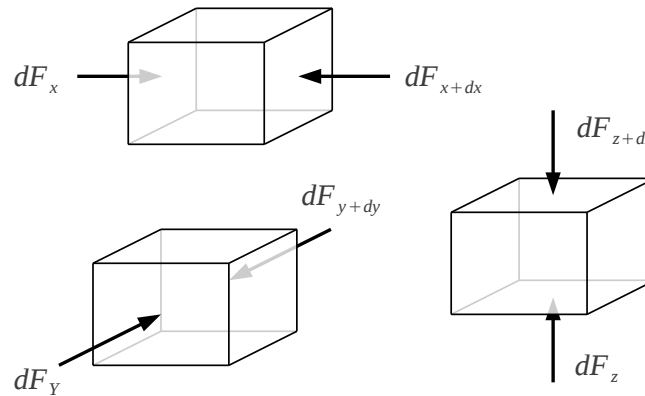
avec U la vitesse de l'écoulement

2.2 Équation fondamentale de la statique des fluides

Unité de volume fluide dans le champ de pesanteur terrestre...



...soumise à des forces



Forces de surface :

- forces : $d\vec{F}_{x_i}, d\vec{F}_{x_i+dx_i}$
- surfaces : $dS_{x_i} = dx_j dx_k$

Forces de volume :

- poids de la particule $d\vec{P} = -dP \vec{Z}$ (\vec{Z} et \vec{g} opposés)
- variation de poids : $dP = dm g = \rho dx dy dz g = \rho dS_z dz g$

Principe fondamental de la statique¹ :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext.}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^3 (d\vec{F}_{x_i} + d\vec{F}_{x_i+dx_i}) + d\vec{P} = \vec{0}$$

Projections :

- sur \vec{X} : $dF_x - dF_{x+dx} = 0$
- sur \vec{Y} : $dF_y - dF_{y+dy} = 0$
- sur \vec{Z} : $dF_z - dF_{z+dz} - dP = 0$

1. Principe Fondamental de la Statique (PFS) ou BAME (Bilan des Actions Mécaniques Extérieures)

En allant plus loin ($/dS_i$) :

$$- \frac{dF_x}{dS_x} - \frac{dF_{x+dx}}{dS_x} = 0 \Rightarrow p_x = p_{x+dx}$$

$$- p_y = p_{y+dy}$$

$$- \frac{dF_z}{dS_z} - \frac{dF_{z+dz}}{dS_z} - \frac{dP}{dS_z} = 0 \Rightarrow \underbrace{p_z - p_{z+dz}}_{-dp_z} - \rho g dz = 0$$

Forme différentielle :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g} \quad (2.4)$$

Forme intégrale :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{z_1}^{z_2} -\rho g dz \Rightarrow p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

Principe de Pascal² :

$$\boxed{p_i + \rho g z_i = \text{cte}} \quad (2.5)$$



Attention, axe orienté vers le haut ! (sens opposé à celui de \vec{g})



Lac de Montagne

Un lac en altitude possède une température moyenne de 4°C et une profondeur maximale de 50 m. La pression atmosphérique au niveau de la surface du lac est de 80 000 Pa.

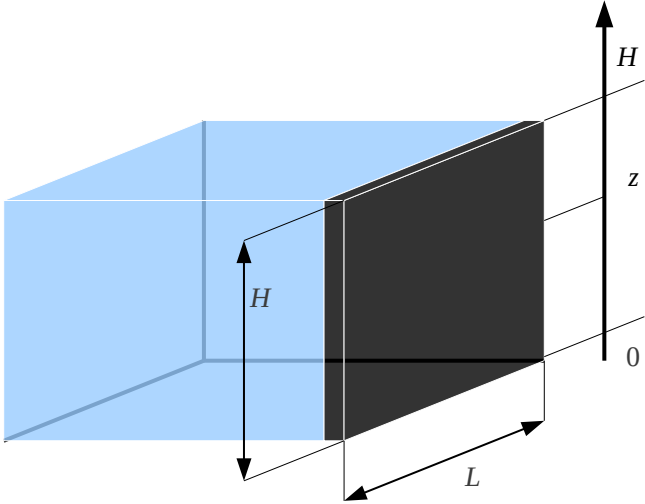
1. quelle sera la pression absolue au plus profond de ce lac ($\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$) ?
2. même question sachant que pour la même profondeur, une couche de gazole épaisse de 10 m flotte en surface ($\rho_{\text{gazole}} = 850 \text{ kg.m}^{-3}$)

2.3 Action des forces de pression sur une paroi



incompressible \neq isovolume ($\rho = \text{cte}$)

incompressible : $\rho = \rho(T)$. $\rho = \text{cte}$ n'est vrai qu'en incompressible **isotherme** (isovolume)



Force exercée par le fluide à une profondeur z sur la paroi

$$dF_{1,z} = p_z dS_z = [p_{atm} + \rho g (H - z)] dS_z$$

Force exercée par l'atmosphère sur la paroi à la côte z

$$dF_{2,z} = p_z dS_z \approx p_{atm} dS_z$$

Résultante :

$$\|d\vec{F}_z\| = dF_{1,z} - dF_{2,z} = \rho g (H - z) dS_z$$

Somme des résultantes de chaque élément de surface $L dz$:

$$F = \int_0^H dF = \int_0^H p_z L dz = \int_0^H \rho g (H - z) L dz$$

Au final :

$$F = \frac{1}{2} \rho g L H^2 \tag{2.6}$$

Où est situé le point d'application de cette force ?

- symétrie horizontale \rightarrow point d'application sur la verticale à $L/2$
- hauteur h du point C sur cette verticale ?

D'après le PFS, h doit être telle que

$$\sum \vec{M}_{/C} = \vec{0}$$

- au-dessus du point C ($0 < z < h$)

$$\vec{M}_{/C,1} = \int_0^h dF (C - z) = \int_0^h \rho g L z dz (h - z) = \frac{1}{6} \rho g L h^3$$

- en-dessous du point C ($C < z < H$)

$$-\vec{M}_{/C,2} = \int_h^H dF (z - h) = \int_h^H \rho g L z dz (z - h) = \frac{1}{6} \rho g L (2 H^3 + h^3 - 3 H^2 h)$$

Finalement :

$$\vec{M}_{/C,1} + \vec{M}_{/C,2} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2}{3} H \tag{2.7}$$

2.4 Théorème d'Archimède

On se pose le problème suivant :



Un plongeur ($S_{\text{peau}} \approx 180 \text{ dm}^2$) est équipé d'une bouteille de 12 L de masse 19 kg et d'une combinaison néoprène de 7 mm d'épaisseur. En considérant que le corps humain est à flottabilité neutre et que le poids apparent du plomb est identique à son poids absolu, déterminer le nombre de plombs d'1 kg à disposer sur sa ceinture de manière à ce qu'il soit équilibré (ou légèrement surlesté).

N.B. : $\rho_{\text{np}} = 190 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

Archimède ?

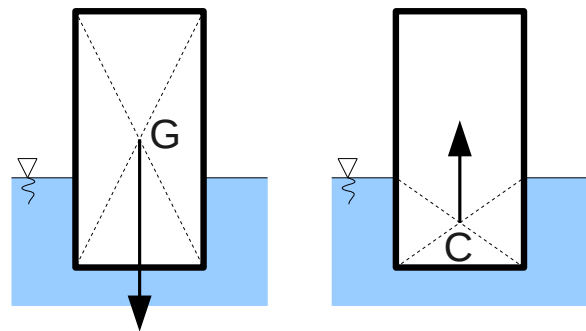


FIGURE 2.1 – Centre de gravité, centre de carène

- né et mort à Syracuse vers 287 av. J.-C. et en 212 av. J.-C. (Grèce)
- couronne du roi Hérion II : vérification de sa composition (100% or ?)
- observation de flottabilité, « Eurêka »
- **traité des corps flottants**

« Tout corps plongé dans un fluide au repos, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut, et opposée au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée poussée d'Archimède. »

La poussée d'Archimède s'applique au centre de masse de ce fluide, appelé **centre de carène** pour les bateaux (cf. Fig. 2.1).

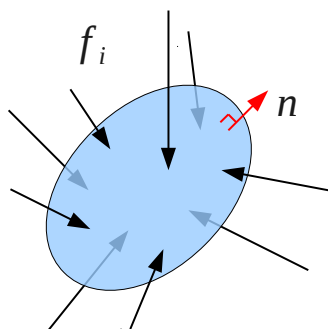
Pour un solide (\cdot_s) immergé dans un fluide (\cdot_f) :

- le poids du solide est noté P ; $P = m g = V_s \rho_s g$
- la poussée d'ARCHIMÈDE est notée Π

Rapide parenthèse sur la flottabilité des solides :

- si $P = \Pi$, alors le solide est en équilibre dans l'eau
- si $P > \Pi$, alors le solide « coule »
- si $P < \Pi$, alors le solide « flotte »

Cherchons à déterminer la valeur de cette poussée d'Archimède. Pour cela, considérons un solide immergé dans un fluide. Soient f_i les forces fluides qui s'exercent sur le solide et \vec{n} la normale sortante :



— pression / normale sortante : $\vec{df} = -p \vec{dS}$

$$— \vec{\Pi} = \int_S -p \vec{dS}$$

Cette équation paraît difficilement exploitable. Au début du cours, nous avons pu expliciter $(\overrightarrow{\text{grad}} p)$ (cf. Éq. (2.4) p. 28), essayons de le faire apparaître ici.

Pour cela, introduisons \vec{u} , un champ de vecteur uniforme.

$$— I = \vec{u} \cdot \vec{\Pi} = - \int_S p \vec{u} \cdot \vec{dS}$$

$$— \text{Th. de flux-divergence (ou de Green}^3\text{-Ostrogradski}^4) : I = - \int_S p \vec{u} \cdot \vec{dS} = - \int_V \text{div}(p \vec{u}) dV$$


$$— \text{Leibniz} : \text{div}(p \vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}}(p) \cdot \vec{u} + p \text{div} \vec{u}$$


— \vec{u} uniforme :

$$\vec{\Pi} = - \int_V \overrightarrow{\text{grad}}(p) dV$$

Poids du volume fluide déplacé :

$$\boxed{\vec{\Pi} = - \left(\int_V \rho_f dV \right) \cdot \vec{g} = -m_f \vec{g}} \quad (2.8)$$

3.  EN George GREEN, 1793-1841

4.  UKR Mikhaïl Vassilievitch OSTROGRADSKY, 1801-1862

Retour à l'exemple...

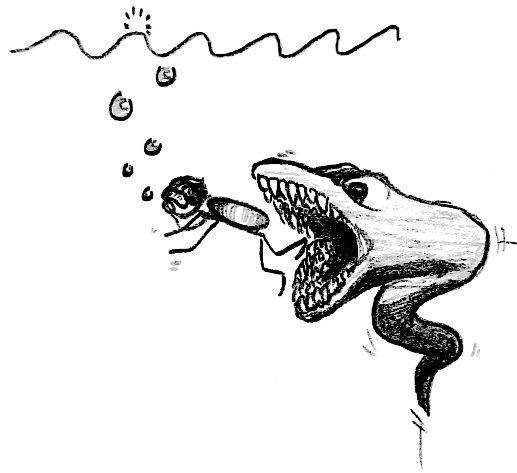


FIGURE 2.2 – « Plongeur en difficulté » par William Stocker CL221

Le système {plongeur} est constitué de 4 entités :

- le corps humain
- la combinaison de néoprène
- la bouteille de plongée (également appelée *bloc*)
- le plomb accroché à sa ceinture

La quantité de plomb recherchée permettra au système {plongeur} d'être à l'équilibre; il est donc possible d'appliquer un principe fondamental de la statique pour déterminer n le nombre de plomb d'1 kg.

Après projection sur \vec{g} :

$$P_{\text{humain}} + \underbrace{P_{\text{bouteille}}}_{=m_{\text{bout.}} g} + \underbrace{P_{\text{combinaison np}}}_{V_{\text{np}} \rho_{\text{np}} g} + \underbrace{P_{\text{plomb}}}_{=n g} = \Pi_{\text{humain}} + \underbrace{\Pi_{\text{bouteille}}}_{=V_{\text{bout.}} \rho_{\text{eau}} g} + \underbrace{\Pi_{\text{combinaison}}}_{=\rho_{\text{eau}} V_{\text{np}} g} + \Pi_{\text{plomb}}$$

Cette égalité se ramène à une équation à un inconnu n .



<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

3.1	Vocabulaire	34
3.1.1	Ligne de courant	34
3.1.2	Trajectoire	35
3.2	Flux généralisé	36
3.2.1	Débit volumique	36
3.2.2	Débit massique	36
3.3	Stationnaire, instationnaire, permanent, transitoire	37
3.3.1	Zoom sur les allées tourbillonnaires de von Kàrmàn	38
3.3.2	Fréquences caractéristiques	39
3.3.3	Impact sur la traînée et la portance	40
3.4	Système de coordonnées en mécanique des fluides	43
3.4.1	Descriptions Lagrangiennes et Euleriennes	43
3.4.2	Dérivée particulaire	43

- notions liées au champ de vitesse d'un fluide **newtonien** (cf. § 5, p. 57) en **mouvement**
- domaine de l'espace V , écoulement caractérisé par un champ de vitesse $\vec{U}(M,t)$

3.1 Vocabulaire

3.1.1 Ligne de courant

Ligne de courant (*streamline*) : une ligne de courant à l'instant t_0 est une courbe dont la tangente en chacun de ses points est, à l'instant t_0 , colinéaire au vecteur vitesse local du champ de l'écoulement

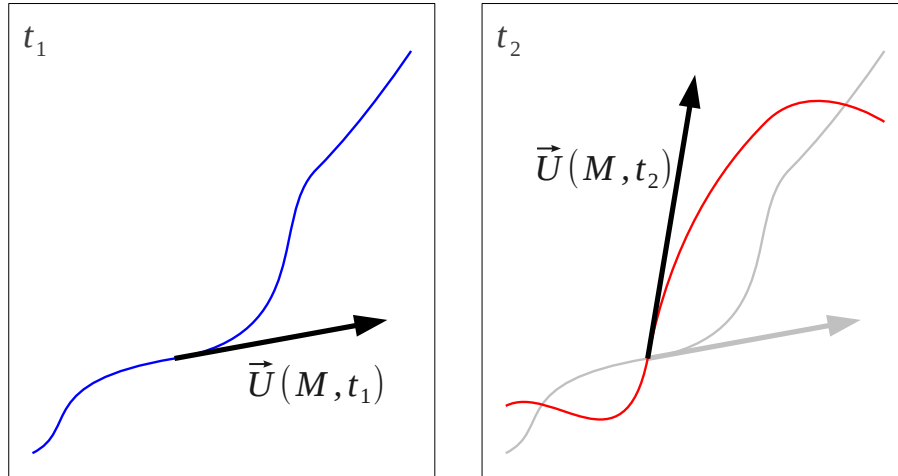


FIGURE 3.1 – Allure de la courbe représentative au cours du temps, régime permanent

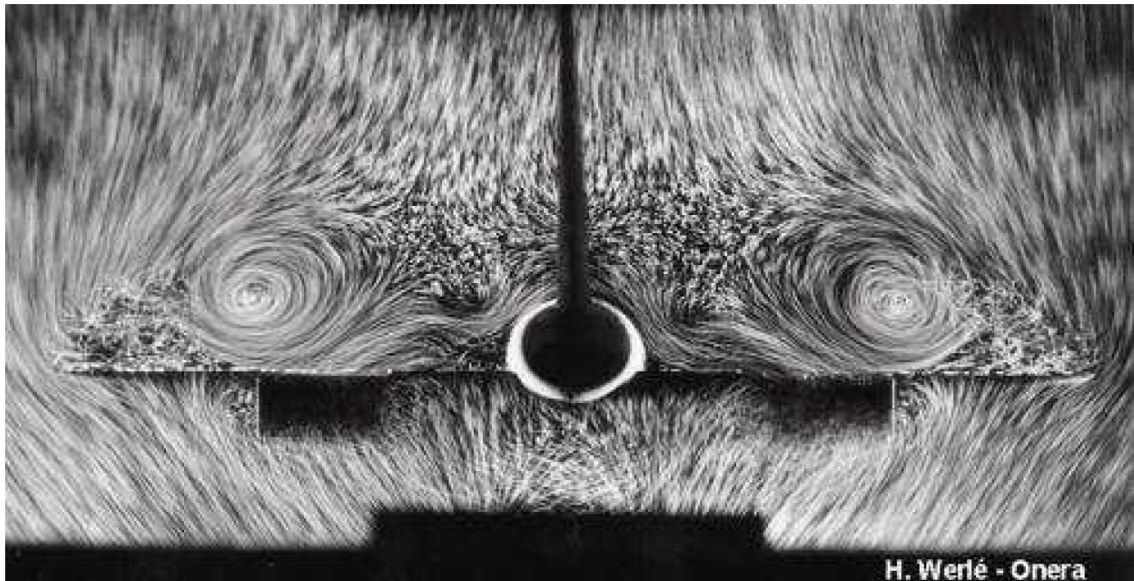
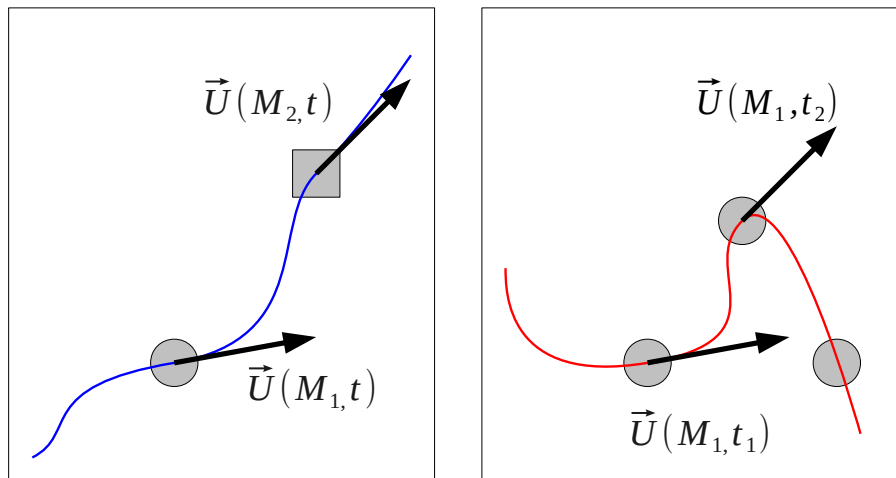


FIGURE 3.2 – Visualisation par PIV (*Particle Image Velocimetry* (cf. § 1.3, p. 22)) des lignes de courant de l'écoulement transverse autour du Concorde (image ONERA, Office national d'études et de recherches aérospatiales)

3.1.2 Trajectoire

Trajectoire (*particle path*) : courbe décrite au cours du temps par une particule fluide quelconque



Cas particuliers : point d'arrêt (cf. § 4.6, p. 52)

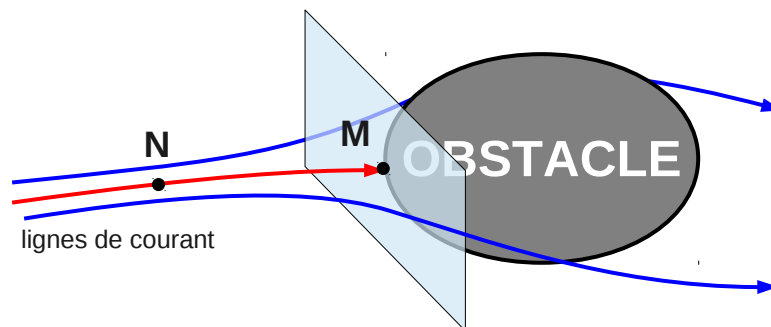
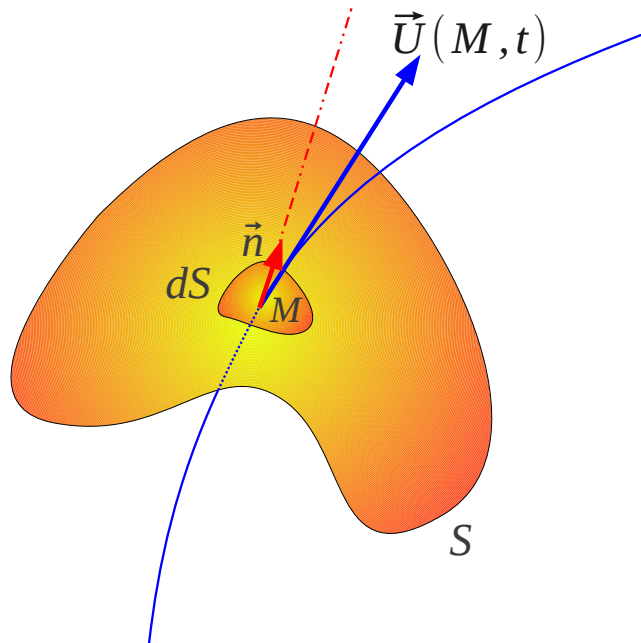


FIGURE 3.3 – Exemple de point d'arrêt sur l'écoulement autour d'un cylindre

3.2 Flux généralisé

Soit $Q(x,y,z,t)$ une fonction quelconque de l'écoulement et S une surface fixe



Le flux élémentaire φ de la grandeur Q à travers l'élément de surface dS sous l'action de la vitesse \vec{U} s'écrit :

$$dQ = Q \vec{U} \cdot \vec{n} dS \quad \Rightarrow \quad \varphi = \iint_S dQ = \iint_S Q \vec{U} \cdot \vec{n} dS \quad (3.1)$$

Par convention :

- \vec{n} orienté vers l'extérieur
- flux « sortant » positif

3.2.1 Débit volumique

Débit volumique $Q = 1$, noté q_v

$$\varphi' = q_v = \iint_S \vec{U} \cdot \vec{n} dS \quad \text{en m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \quad (3.2)$$

3.2.2 Débit massique

Débit massique $Q = \rho$, noté q_m

$$\varphi'' = q_m = \iint_S \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dS \quad \text{en kg} \cdot \text{s}^{-1} \quad (3.3)$$

3.3 Stationnaire, instationnaire, permanent, transitoire

Écoulement autour d'un cylindre de base circulaire (simulations réalisées avec le code NSMB).

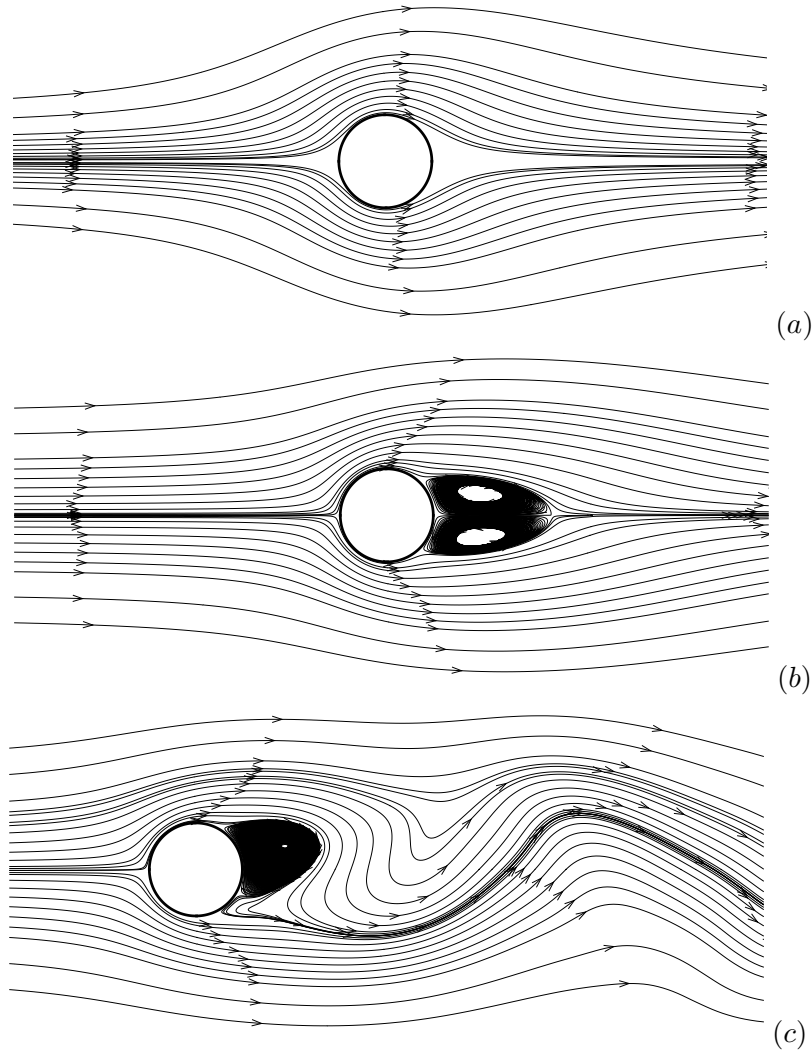



FIGURE 3.4 – Simulations bi-dimensionnelles autour d'un cylindre fixe à (a) $Re = 1$, (b) $Re = 25$ et (c) $Re = 100$ (PhD. Marcel 2010)

- $Re = 1$, pas de zones de recirculations en aval de l'écoulement
- $Re = 25$, apparition d'un décollement à l'aval du cylindre, puis de 2 tourbillons contra-rotatifs
- $Re = 100$, apparition des allées tourbillonnaires de von Kármán¹

1.  HON Theodora VON KÁRMÁN, 1881-1963

3.3.1 Zoom sur les allées tourbillonnaires de von Kàrmàn

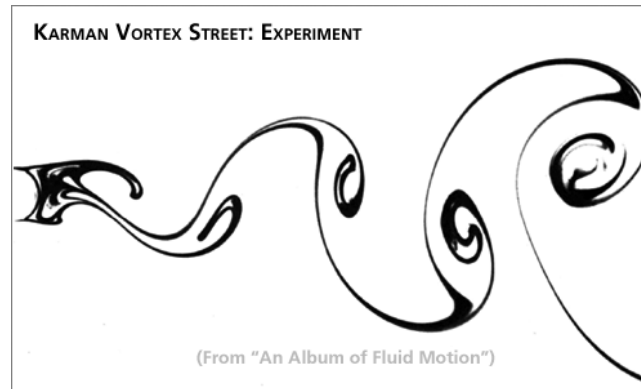


FIGURE 3.5 – Allées tourbillonnaires de von Kàrmàn

Les tourbillons alternés des allées de von Kàrmàn n'ont rien à voir avec la turbulence ; ils peuvent exister en régime laminaire comme en régime turbulent. Par contre, ils engendrent nécessairement un régime permanent instationnaire.

Le régime **stationnaire** et le régime **instationnaire** sont différenciés par rapport à la dépendance au temps. Dans un code de calcul, il est possible de lancer des simulations stationnaires en résolvant directement les équations discrétisées sans terme temporel ce qui peut faire gagner du temps. Cependant, si le phénomène physique modélisé est instationnaire, le code de calcul ne pourra pas converger vers un résultat satisfaisant.

Le régime **permanent** (ou établi), à l'opposé du régime **transitoire** peut se définir uniquement lors de l'analyse d'un signal. Le régime permanent est doté d'un caractère asymptotique (signal constant, ou variations de signal bornées entre deux asymptotes). Le régime transitoire est tout ce qui n'est pas en régime permanent (début du signal, perturbations du signal entre deux phases établies, etc.).



Exemples :

- la température atteint un régime permanent stationnaire lors de la chauffe d'un radiateur (au bout d'un certain temps, la température du radiateur devient constante) alors que le régime transitoire de cette chauffe est instationnaire (montée en température)
- le régime permanent d'un oscillateur (mécanique ou électronique) est instationnaire

Les écoulements représentés à la Fig. 3.4, p. 37 sont représentés dans leur phase permanente (le régime transitoire a été dépassé). Sont-ils stationnaires ou instationnaires ?



Le régime laminaire ou le régime turbulent n'ont pas de lien avec les 4 régimes précédents, ils ont leur propre définition (cf. § 6, p. 63).

3.3.2 Fréquences caractéristiques

Le nombre de Reynolds représente une vitesse adimensionnée (cf. § 6, p. 63) et se note Re , tandis que le nombre de Strouhal (S ici mais généralement noté Sr) représente une fréquence adimensionnée.

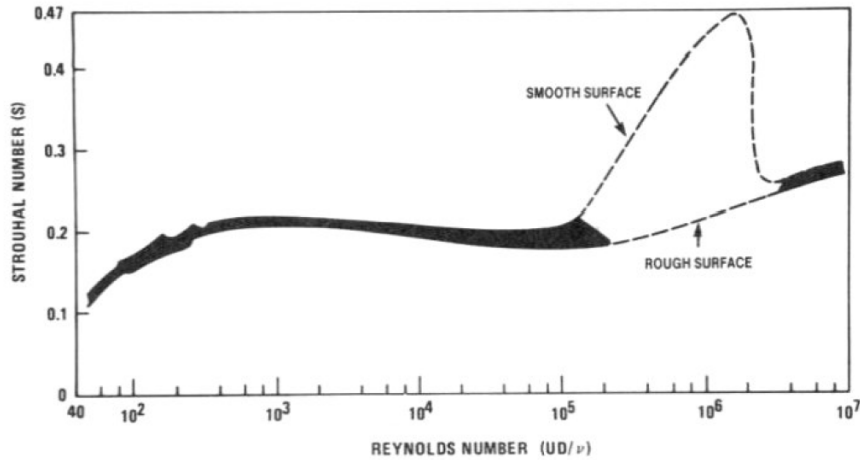
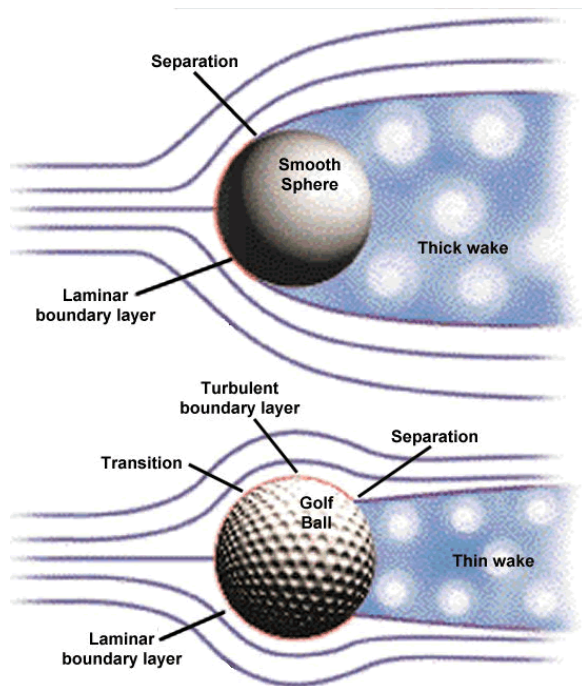


FIGURE 3.6 – Nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre seul (Blevins 1991)

On remarque que $S \approx cte$ sur une large gamme de Re (plus de 2 décades). C'est sur ce principe que repose le fonctionnement du débitmètre effet vortex.



Le fonctionnement du débitmètre à effet vortex ? C'est-à-dire ?



Légende :

- *Wake* : sillage
- *Seperation* : point de décollement (la ligne de courant se détache du profil solide et poursuit sa course)
- *Boundary Layer* : couche limite (cf. § 5.5, p. 60)

FIGURE 3.7 – Perturbation de l'écoulement autour de surfaces lisses ou rugueuses

3.3.3 Impact sur la traînée et la portance

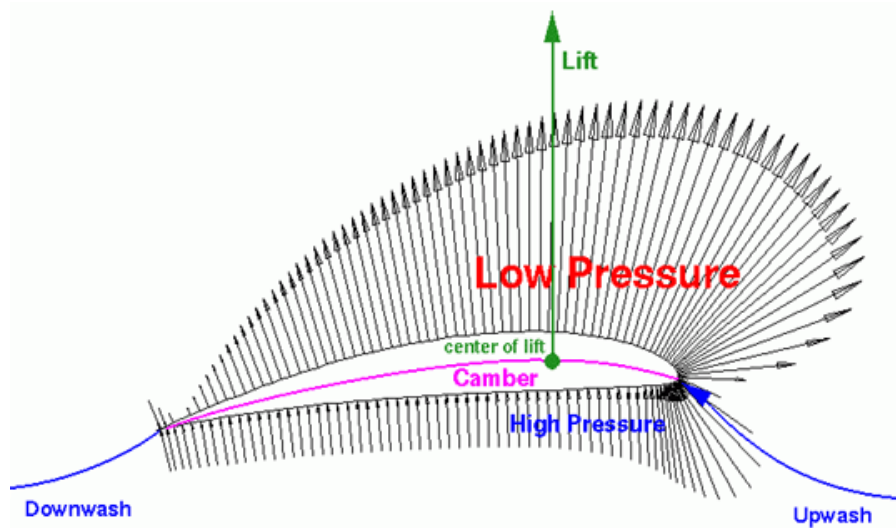


FIGURE 3.8 – Illustration des forces de traînée et de portance à travers l'exemple d'un écoulement autour d'une aile d'avion

Sur la Fig. 3.8, on peut apercevoir que l'écoulement génère des zones de basse pression, et de haute pression par rapport à l'écoulement moyen, en rencontrant la surface solide de l'aile. En intégrant sur les éléments de surface dS , il est ainsi facile de remonter aux forces localement appliquées par le fluide sur la surface solide (vecteurs sur la Fig. 3.8). En sommant toutes ces forces locales, nous obtenons la force totale.

La projection de cette force totale dans la direction de l'écoulement est la force de traînée (*drag*) et caractérise la résistance qu'aura l'objet solide dans l'écoulement considéré.

La projection de la force totale dans la direction orthogonale à l'écoulement est la force de portance (*lift*). Un objet symétrique a forcément une portance statistiquement nulle.

NACA 0012

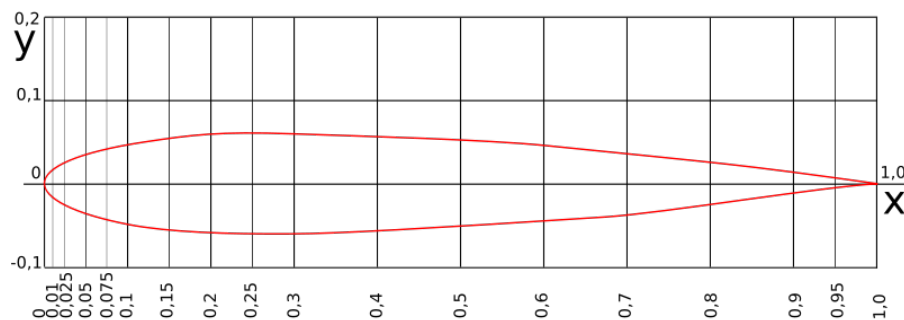


FIGURE 3.9 – Aile de type NACA0012



La Fig. 3.9 représente une aile parfaitement symétrique. Comment un corps doté de ces ailes là peut-il voler ?

La Fig. 3.10 représente les captures instantanées de certaines caractéristiques de l'écoulement autour d'un cylindre seul à $Re = 100$ ainsi que l'analyse spectrale qui a été réalisée sur les forces de traînée et de portance.

Légende :

- écoulement plan (\vec{x}, \vec{y}) dans le sens de \vec{x}
- $C_x = C_D$, coefficient de traînée
- $C_z = C_L$, coefficient de portance
- PS, *Power Spectrum* (FFT + périodogrammes cumulés + fenêtrage *hanning*)
- u , composante tangentielle de la vitesse (selon \vec{x})
- w , composante orthogonale de la vitesse (selon \vec{z})

$$C_i = \frac{2 F_i}{\rho_{\text{ref.}} D U_{\text{ref.}}^2 L} \quad t^* = \frac{t U_{\text{ref.}}}{D}$$

Le tracé temporel (en fonction de t^*) des signaux de C_x et de C_z nous révèlent les choses suivantes :

- passage du régime transitoire au régime permanent vers $t^* = 100$, régimes permanent et transitoire instationnaires
- moyenne temporelle du C_z nulle (le cylindre est bien symétrique)
- fréquence d'oscillation plus importante pour le C_x que pour le C_z

Le tracé du PS au-dessus nous permet à l'aide des transformées de Fourier d'extraire les fréquences présentes dans l'échantillon. Ce tracé nous révèle une fréquence fondamentale de la portance autour de $Sr = 0,17$ ce qui est bien en accord avec la figure de Blevins (cf. Fig. 3.6, p. 39). La fréquence fondamentale de la traînée est quant-à-elle proche de 0,33.



Comment expliquer que la fréquence fondamentale au niveau de la traînée vaut juste le double de celle de la portance ?

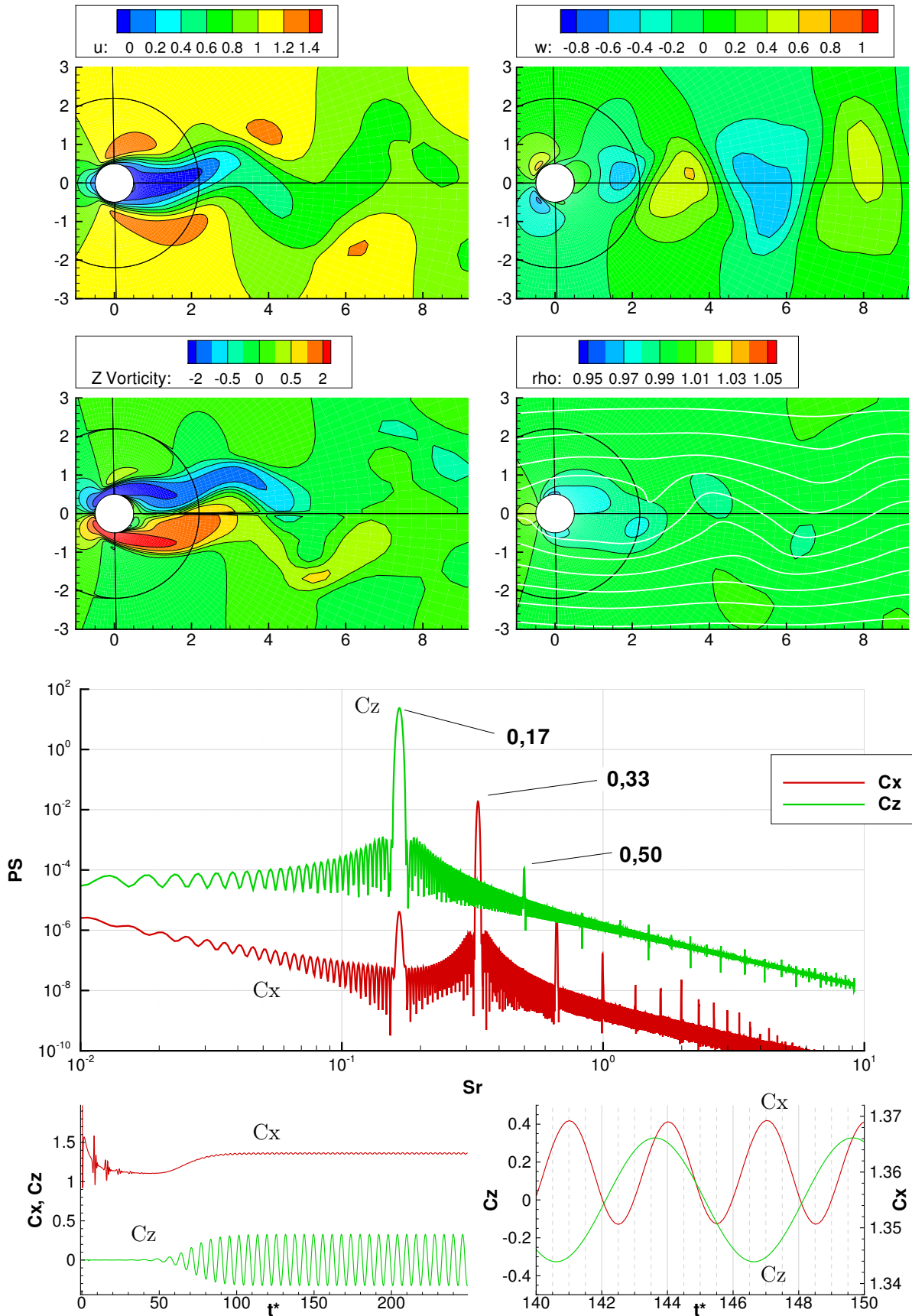
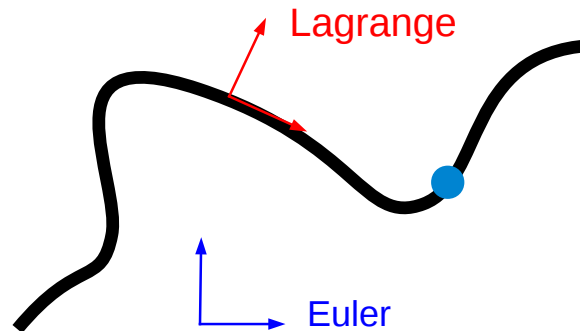


FIGURE 3.10 – Simulation bi-dimensionnelle autour d'un cylindre fixe à $Re = 100$ et analyse spectrale (PhD. Marcel 2010)

3.4 Système de coordonnées en mécanique des fluides

3.4.1 Descriptions Lagrangiennes et Euleriennes

La description lagrangienne consiste à suivre dans le temps les particules fluides le long de leurs trajectoires. La description eulérienne, quant-à-elle, repose sur le champ des vitesses.



→ dérivée particulaire (ou dérivée lagrangienne)

Approche Lagrangienne habituelle en mécanique mais peu compatible avec des conditions aux limites figées dans l'espace

Approche Eulérienne plus appropriée pour les conditions aux limites, mais nécessite d'adapter la mise en équation avec la **dérivée particulaire**

3.4.2 Dérivée particulaire

La représentation d'Euler définit à tout instant la valeur d'une grandeur (par exemple une composante de la vitesse) associée à un point fixe de l'écoulement. La variation de cette grandeur au cours du temps est alors décrite par une dérivée partielle parfois appelée **dérivée eulérienne**.

La représentation de Lagrange suit une particule dans son mouvement. La variation précédente est alors représentée par la **dérivée particulaire**. Elle tient compte non seulement de la variation locale du paramètre au cours du temps mais aussi de la variation de celui-ci liée au déplacement de la particule.

Le lien entre la description lagrangienne et la description eulérienne est démontré ici pour un mouvement à 3 dimensions. Pendant l'intervalle de temps dt , une particule se déplaçant à la vitesse $\vec{U}(u,v,w)$ située en (x,y,z) à l'instant t s'est déplacée à $(x + u dt, y + v dt, z + w dt)$. La variation de la grandeur Q s'écrit donc :

$$\begin{aligned}dQ &= Q(x + u dt, y + v dt, z + w dt, t + dt) - Q(x,y,z,t) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} u dt + \frac{\partial Q}{\partial y} v dt + \frac{\partial Q}{\partial z} w dt + \frac{\partial Q}{\partial t} dt\end{aligned}$$

Définition

En divisant par dt , nous obtenons la dérivée particulière (qui se note D) qui s'écrit pour une grandeur scalaire Q :

$$\boxed{\frac{DQ}{Dt} = \vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} Q + \frac{\partial Q}{\partial t}} \quad (3.4)$$

- $(\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} Q)$ est le terme advectif (non-uniformité de l'écoulement)
- $(\partial Q/\partial t)$ est le terme temporel (caractère instationnaire)

De même, pour une grandeur vectorielle \vec{R} :

$$\boxed{\frac{D\vec{R}}{Dt} = (\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{R} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}} \quad (3.5)$$

Exemples en système de coordonnées cartésiennes 3 D

Pour la masse volumique ρ :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Pour la vitesse \vec{U} :

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = (\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{U} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = u \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$$



<http://matwo.fr/ensam>

Dynamique des fluides en fluide parfait

Sommaire

4.1	Fluide parfait	46
4.2	Équation d'Euler	46
4.3	Équation de continuité	47
4.4	Théorème de Bernoulli	48
4.4.1	Formulation du théorème de Bernoulli pour un fluide parfait	48
4.5	Formule de Torricelli	50
4.6	Notion de point d'arrêt	52
4.7	Tube de Pitot	53
4.8	Tube de Venturi	54



4.1 Fluide parfait

- fluide non visqueux : viscosité dynamique nulle, $\mu = 0$ (cf. § 5, p. 57)
- fluide parfait \neq fluide incompressible : $\rho = f(T)$
- fluide parfait \neq gaz parfait
- zone lointaine (paroi) ou en dehors des zones de recirculation

4.2 Équation d'Euler

Considérer une masse m de fluide comme dans un PFD classique n'a pas de sens en mécanique des fluides. Il est préférable de considérer un volume V de fluide. En appliquant le PFD dans un référentiel galiléen pour une particule fluide de masse $dm = \rho dV$, on obtient :

$$\rho \vec{\gamma} = \sum \frac{d\vec{F}_{\text{ext.}}}{dV} \quad (4.1)$$

Les forces extérieures sont au nombre de 3 :

- champ de pesanteur

$$\rho \vec{g}$$

- forces de pression

$$-\overrightarrow{\text{grad}} p$$

- forces de viscosité ≈ 0 (fluide parfait)

Par ailleurs, en choisissant l'approche lagrangienne, l'accélération devient la dérivée particulaire de la vitesse. Nous obtenons ainsi la formulation de l'équation d'Euler¹ :

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \left[(\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{U} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p \quad (4.2)$$

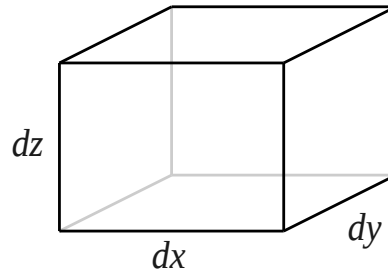


Que donne cette formulation pour un fluide au repos ? Comparez avec l'Éq. (2.4), p. 28.

1. CH Leonhard EULER, 1707-1783

4.3 Équation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse pour un fluide. Considérons un parallélépipède rectangle de dimension (dx, dy, dz) d'un fluide quelconque.



Sur un temps dt , on peut écrire :

- la variation de masse présente dans le parallélépipède

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

- la masse de fluide entrant dans le parallélépipède

$$\begin{aligned} & [\rho(x,y,z) u(x,y,z) dt] dy dz \\ & + [\rho(x,y,z) v(x,y,z) dt] dx dz \\ & + [\rho(x,y,z) w(x,y,z) dt] dx dy \end{aligned}$$

- la masse de fluide sortant

$$\begin{aligned} & - [\rho(x+dx,y,z) u(x+dx,y,z) dt] dy dz \\ & - [\rho(x,y+dy,z) v(x,y+dy,z) dt] dx dz \\ & - [\rho(x,y,z+dz) w(x,y,z+dz) dt] dx dy \end{aligned}$$

Finalement, en faisant le bilan, nous obtenons l'équation de continuité, qui, dans sa forme locale conservative donne :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0} \quad (4.3)$$



Que donne l'équation (4.3) pour un écoulement incompressible ?

4.4 Théorème de Bernoulli

Partons du premier principe de la thermodynamique appliqué à un système ouvert pour un écoulement stationnaire :

$$w_{1 \rightarrow 2} + q_{1 \rightarrow 2} = \Delta u + \Delta (p v) + \frac{1}{2} \Delta (C^2) + g \Delta z$$

avec :

- w le travail spécifique reçu par le système en $[\text{J.kg}^{-1}]$,
- q la chaleur spécifique reçue par le système en $[\text{J.kg}^{-1}]$,
- u l'énergie interne spécifique en $[\text{J.kg}^{-1}]$,
- p la pression en $[\text{Pa}]$,
- v le volume spécifique en $[\text{m}^3.\text{kg}^{-1}]$,
- C la vitesse en $[\text{m.s}^{-1}]$,
- g l'accélération de la pesanteur en $[\text{m.s}^{-2}]$
- z l'altitude en $[\text{m}]$.

Il n'y a pas de transfert de chaleur ni de paroi mobile entre l'entrée et la sortie :

$$w_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{et} \quad q_{1 \rightarrow 2} = 0$$

En introduisant la masse volumique ρ en $[\text{kg.m}^{-3}]$:

$$p v = \frac{p}{\rho}$$

Dans un fluide parfait, sur une ligne de courant, l'énergie interne reste constante :

$$\Delta u = 0$$

Au final, pour un fluide incompressible :

$$\frac{1}{\rho} \Delta p + \frac{1}{2} \Delta (C^2) + g \Delta z = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{p_i}{\rho} + \frac{1}{2} C_i^2 + g z_i = \text{cte}$$

En reprenant les notations utilisées en mécanique des fluides :

$$\boxed{\frac{p_i}{\rho} + \frac{1}{2} U_i^2 + g z_i = \text{cte}}$$

4.4.1 Formulation du théorème de Bernoulli pour un fluide parfait

Le long d'une ligne de courant, pour un fluide parfait (ou/et diamètre de conduite élevé) et en régime stationnaire, le théorème de Bernoulli² s'écrit :

$$\boxed{p_i + \frac{1}{2} \rho U_i^2 + \rho g z_i = \text{cte}} \quad (4.4)$$

Vocabulaire :

$E = p + 1/2 \rho U^2 + \rho g z$	charge totale
$p + \rho g z$	charge statique
$1/2 \rho U^2$	charge dynamique
$P = p^* = p + 1/2 \rho U^2$	pression totale

2.  CH Daniel BERNOULLI, 1700-1782



Lorsque l'énergie à la sortie sera plus faible qu'à l'entrée, cette perte d'énergie par unité de volume sera donc appelée **perte de charge** (cf. § 6, p. 63).

Il est également possible d'exprimer Bernoulli en terme de hauteur $(4.4) \times 1/(\rho g)$

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g} = \text{cte} \quad (4.5)$$

Vocabulaire :

- $p/(\rho g) + z$: hauteur piézométrique ou **statique**
- $U^2/(2g)$: hauteur cinétique ou **dynamique**

H est homogène à une longueur. Si le ρ utilisé est celui de l'eau, on ne parlera pas de mètres mais de mètres de colonne d'eau [mCE] (cf. § 2.1, p. 26). Il existe également le mètre de colonne d'huile [mCH] et le mètre de colonne de mercure [mHg].

4.5 Formule de Torricelli

Considérons 2 réservoirs à niveaux constants (« trop plein »³)

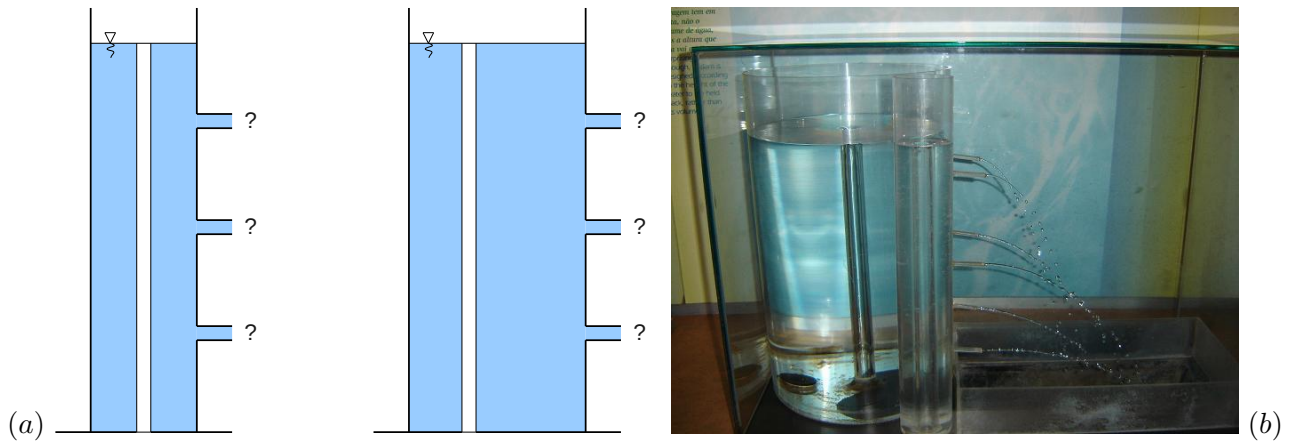
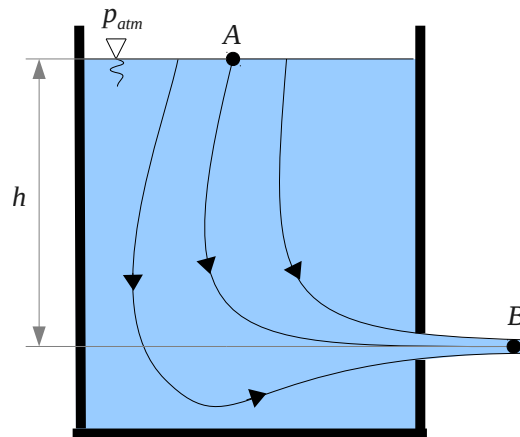


FIGURE 4.1 – Expérience de Torricelli

Quelles sont les vitesses en sortie des « piquages » ? Sur la Fig. 4.1-(b), on s'aperçoit que la vitesse ne semble dépendre que de la hauteur.



En appliquant le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant reliant A à B , on obtient :

$$p_A + 0,5 \rho U_A^2 + \rho g z_A = p_B + 0,5 \rho U_B^2 + \rho g z_B$$

Or $p_A = p_B = p_{atm.}$ et $U_A^2 \ll U_B^2$

Finalement

$$U_B = \sqrt{2 g (z_A - z_B)} = \sqrt{2 g h} \quad (\text{axe des } \vec{z} \text{ orienté vers le haut, } z_A > z_B)$$

Formule de Torricelli⁴

$$\boxed{U_B = \sqrt{2 g h}} \quad (4.6)$$



Pourquoi $U_A^2 \ll U_B^2$? Quelques pistes :

- variation de z_A
- (ou) conservation du volume
- (ou) champ de vitesse et champ de pression

3. système permettant la régulation du niveau d'eau par débordement

4. Evangelista TORRICELLI, 1608-1647

On peut remarquer que les sections $S \neq \sigma$ (la section du jet n'est pas celle de l'orifice). L'aspect « lisse » des lignes de courant peut effectivement réduire la section du jet ; on ne peut avoir de ligne de courant « anguleuse » (cf. Fig. 4.2).

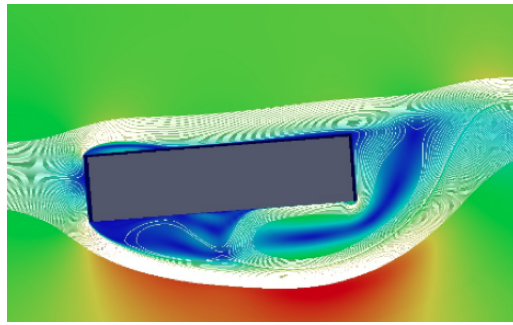
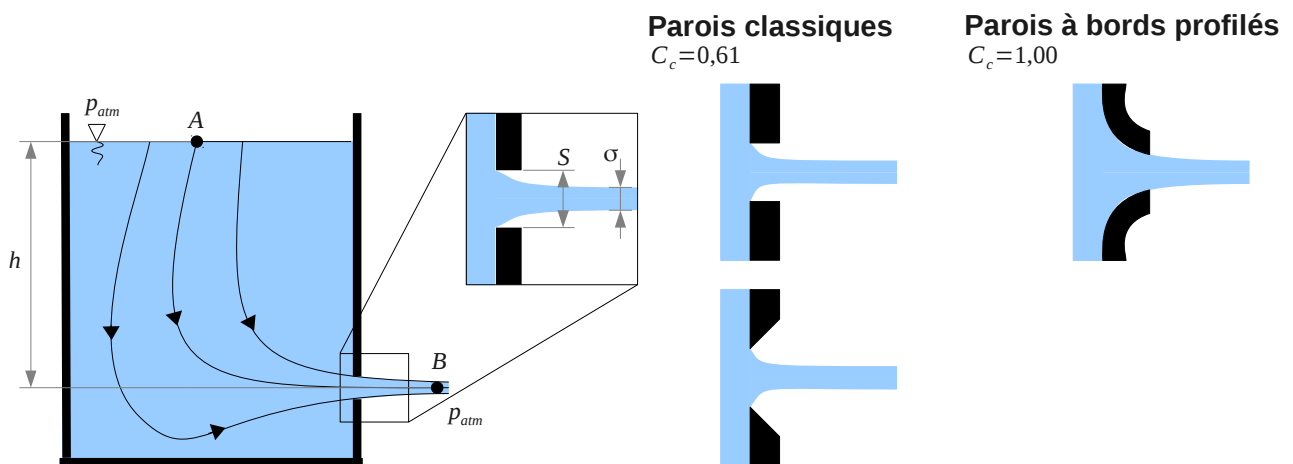


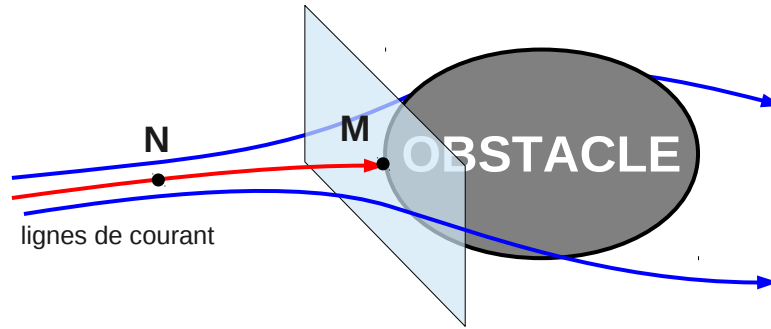
FIGURE 4.2 – Écoulement autour d'un profil rectangulaire

Cette striction du jet ne va en aucun cas modifier la valeur de la vitesse, mais plutôt celle du **débit** en sortie. On fait donc apparaître un coefficient de contraction C_c pour quantifier cette striction. Le débit volumique est donc donné par :

$$q_v = C_c S U_B \quad (4.7)$$



4.6 Notion de point d'arrêt



- la majorité des lignes de courant contournent l'obstacle (cf. § 3, p. 33)
- \exists au moins 1 ligne de courant qui s'arrête sur l'obstacle en un point M
- M point d'arrêt, $U_M = 0$

Les charges en M et en N s'écrivent :

$$E_M = p_M + \rho g z_M + \underbrace{\frac{1}{2} \rho U_M^2}_{=0} = p_M + \rho g z_M \quad E_N = p_N + \rho g z_N + \frac{1}{2} \rho U_N^2$$

N et M étant sur la même ligne de courant, il est possible d'appliquer le Théorème de Bernoulli ($E_M = E_N$). Pour $\rho g z_M \approx \rho g z_N$:

$$\boxed{p_M = p_N + \frac{1}{2} \rho U_N^2} \quad (4.8)$$

4.7 Tube de Pitot

Le tube de Pitot⁵ est un instrument de mesure de la vitesse relative de l'écoulement par rapport à une paroi solide, largement utilisé dans l'industrie aéronautique et automobile.

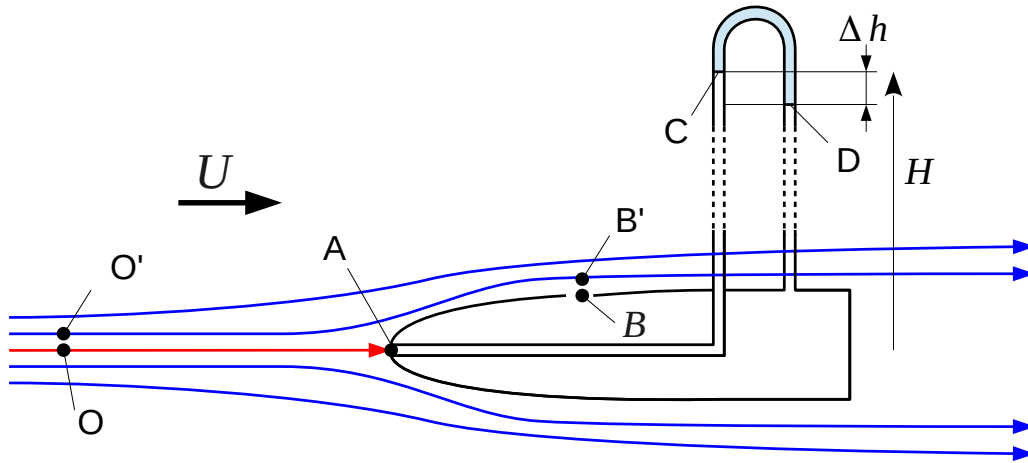


FIGURE 4.3 – Représentation schématique d'un tube de Pitot

Bernoulli entre O et A

$$p_A = p_O + \frac{1}{2} \rho U^2$$

Bernoulli entre O' et B'

$$p_{O'} = p_{B'}$$

Entre O et O' , orthogonal aux lignes de courant \Rightarrow hydrostatique, EFSF (cf. § 2.2, p. 27)

$$p_O = p_{O'} \quad (z_O \approx z_{O'})$$

De même, entre B et B'

$$p_B = p_{B'}$$

Finalement :

$$\boxed{U = \sqrt{2 g \Delta h}} \quad (4.9)$$



Pourquoi peut-on appliquer l'EFSF lorsqu'on est orthogonal aux lignes de courant ?



Même si les formulations se ressemblent, les formules de Toricelli et de Pitot ne concernent pas les mêmes phénomènes.

5. FR Henri PITOT, 1695-1771

4.8 Tube de Venturi

Le tube de Venturi⁶ est un dispositif utilisé principalement pour mesurer des débits ou créer des aspirations et des mélanges.

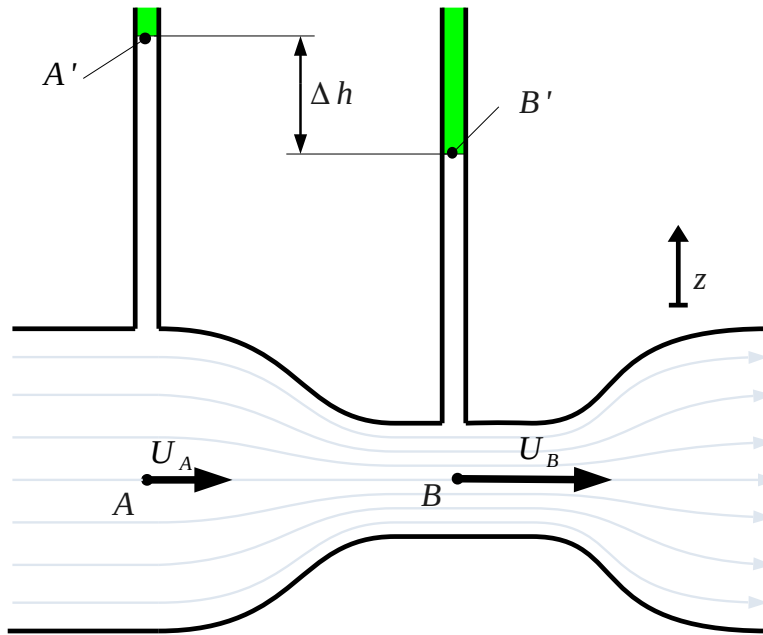


FIGURE 4.4 – Représentation schématique d'un venturi

Bernoulli entre A et B

$$p_A - p_B = \frac{1}{2} \rho (U_B^2 - U_A^2)$$

Principe de Pascal entre A et A'

$$p_A = p_{A'} + \rho g (z_{A'} - z_A) = p_{\text{atm}} + \rho g (z_{A'} - z_A)$$

Principe de Pascal entre B et B'

$$p_B = p_{B'} + \rho g (z_{B'} - z_B) = p_{\text{atm}} + \rho g (z_{B'} - z_B)$$

Or $z_A = z_B$; les deux équations précédentes nous permettent d'écrire

$$p_A - p_B = \rho g \Delta h$$

Finalement


$$U_B^2 - U_A^2 = 2 g \Delta h \quad U_A = q_V / S_A \quad \text{et} \quad U_B = q_V / S_B$$

$$q_V = \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{1/S_B^2 - 1/S_A^2}} \quad (4.10)$$

On peut également expliciter les vitesses d'écoulement

$$U_A = \frac{q_V}{S_A} = \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{S_A^2/S_B^2 - 1}}$$

$$U_B = \frac{q_V}{S_B} = \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{1 - S_B^2/S_A^2}}$$

6.  IIT Giovanni Battista VENTURI, 1746-1822

Quelques exemples d'applications du venturi :

- appareil de mesure du débit (disque ou élargissement/rétrécissement)
- pistolets à peinture
- carburateurs des moteurs à combustion interne
- cheminées (amélioration du tirage)
- pommeaux de douche à économie d'eau, etc.



FIGURE 4.5 – Venturi industriel

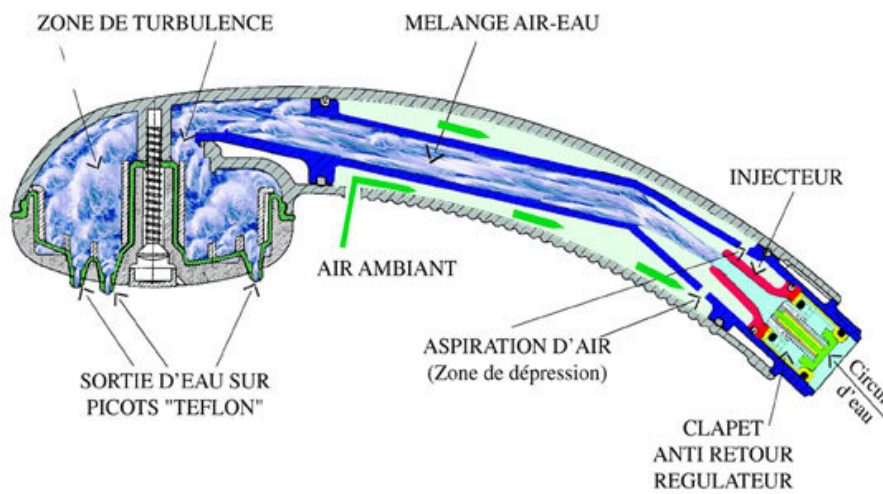


FIGURE 4.6 – Dispositif économiseur d'eau



<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

5.1	Phénoménologie	58
5.2	Caractérisation des fluides newtoniens	59
5.3	Fluides newtoniens et phénomènes visqueux	60
5.3.1	Couche limite	60
5.3.2	Point de décollement	61

- terme inventé par Bingham¹ en 1929 (grec *rheo* et *logos*)
- étude des écoulements et des déformations
- solide élastique : contraintes proportionnelles aux déformations
- fluide newtonien : contraintes proportionnelles aux **vitesse de déformation**

C'est la rhéologie qui va nous permettre de définir la notion de viscosité nécessaire pour la prise en compte des phénomènes suivants :

- couche limite (cf. Fig. 5.5, p. 60)
- décollement et zone de recirculation (cf. Fig. 5.6 p. 61 et 5.8 p. 62)
- frottement visqueux et pertes de charge (cf. § 6, p. 63)

Pour l'eau, il est possible d'interpoler certaines propriétés élémentaires grâce aux formules suivantes, avec θ la température de l'eau en [°C] pour $0 < \theta < 100$:

- Masse volumique ρ en [kg.m⁻³] :

$$\rho = -1,4 \cdot 10^{-7} \theta^4 + 4,45 \cdot 10^{-5} \theta^3 - 7,86 \cdot 10^{-3} \theta^2 + 6,21 \cdot 10^{-2} \theta + 999,86$$

- Viscosité cinématique ν en [m².s] :

$$\nu = 3,25 \cdot 10^{-14} \theta^4 - 9,05 \cdot 10^{-12} \theta^3 + 9,84 \cdot 10^{-10} \theta^2 - 5,51 \cdot 10^{-8} \theta + 1,78 \cdot 10^{-6}$$

- Pression de vapeur saturante en [Pa]

$$P_{v,sat} = 9,68 \cdot 10^{-4} \theta^4 - 3,42 \cdot 10^{-2} \theta^3 + 3,6384 \theta^2 + 15,67 \theta + 674$$

À copier/coller sur un tableur :

```
rho=-0,00000014*theta^4+0,0000445*theta^3-0,00786*theta^2+0,0621*theta+999,86
nu=0,00000000000000325*theta^4-0,00000000000905*theta^3+0,000000000984*theta^2
-0,0000000551*theta+0,00000178
pvsat=0,000968*theta^4-0,0342*theta^3+3,6384*theta^2+15,67*theta+674
```

1. US Eugene Cook BINGHAM, 1878-1945

Considérer la déformation d'un fluide n'a aucun sens puisqu'au bout d'un certain temps, avec la contrainte maintenue, le fluide reviendra à sa position d'équilibre. C'est pour cela qu'il est nécessaire de s'intéresser à la **vitesse de déformation**.

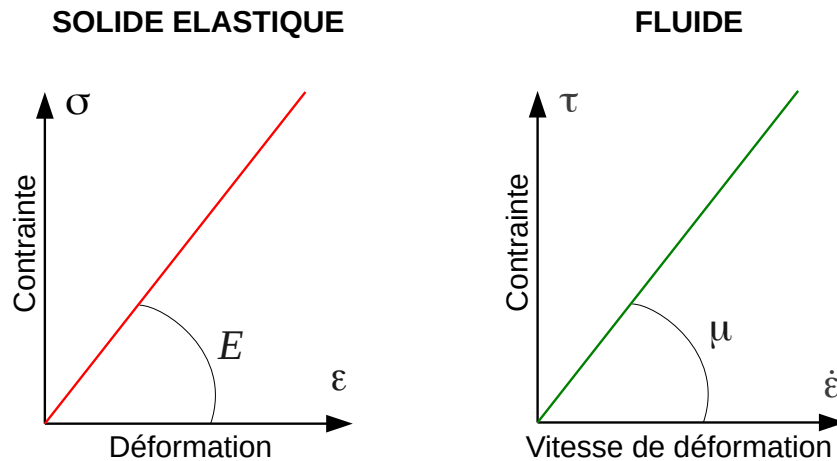


FIGURE 5.1 – Analogie entre le module d'Young E et la viscosité dynamique μ



Unités de τ , μ et $\dot{\epsilon}$?

5.1 Phénoménologie

Alors que les fluides Newtoniens (fluides courants, cf. Fig. 5.2, (1)) subissent une contrainte qui varie proportionnellement à la vitesse de déformation, certains fluides plus complexes ont un comportement non-linéaire entre contrainte et vitesse de déformation. Il s'agit des fluides **non-newtoniens** :

- fluides plastiques ou de Bingham, cf. Fig. 5.2, (2)
ex : dentifrice, ketchup, graisse, peintures non-coulantes...
- fluides rhéofluidifiants (les plus courants des fluides complexes) cf. Fig. 5.2, (3)
ex : sang, encres, pâte à papier, peinture...
- fluides rhéoépaississants, cf. Fig. 5.2, (4)
ex : sable mouillé, maïzena

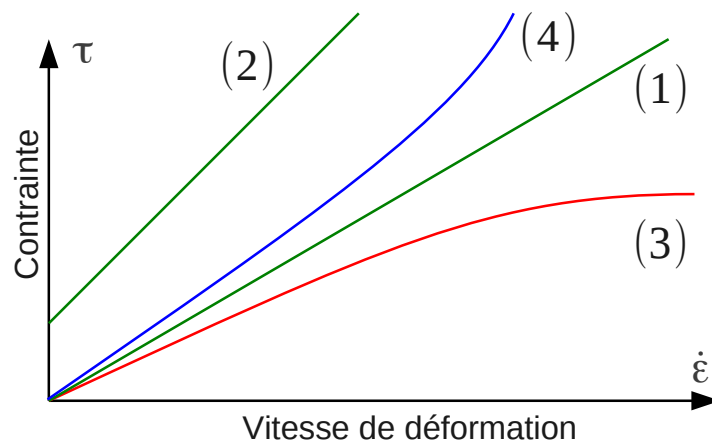


FIGURE 5.2 – Fluide (1) newtonien, (2) de Bingham, (3) rhéofluidifiant et (4) rhéoépaississant

5.2 Caractérisation des fluides newtoniens

Pour caractériser les fluides, nous allons utiliser des **rhéogrammes** (obtenus à partir de Rhéomètres)

- modélisation → déterminer f
- représentations $\dot{\epsilon} = f(t)$ à contrainte τ constante (fluage)
- représentations $\tau = f(t)$ à vitesse de cisaillement $\dot{\epsilon}$ constante (relaxation)

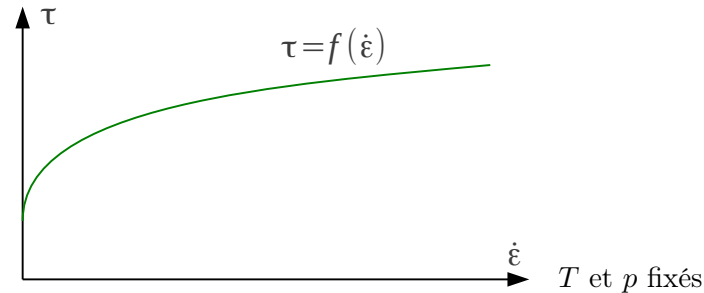


FIGURE 5.3 – Rhéogramme quelconque

Dans le cas des fluides newtoniens, la viscosité est indépendante du cisaillement : on parle alors de **viscosité absolue** (cf. Fig. 5.4).

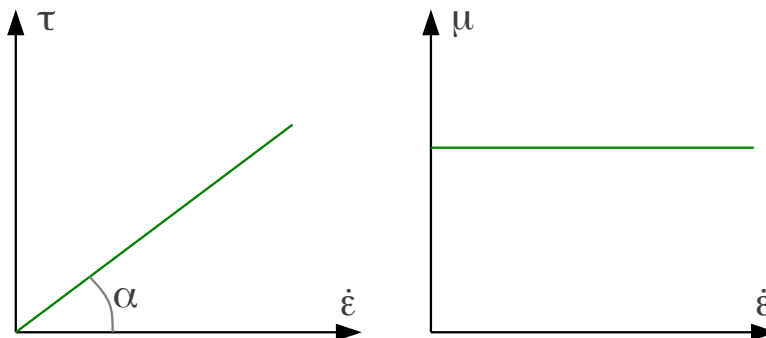


FIGURE 5.4 – Rhéogramme type pour un fluide newtonien

Le modèle mathématique pour caractériser ces fluides est très simple. On définit μ la viscosité par :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\epsilon}} = \tan \alpha = \text{cte} \quad (5.1)$$

- 1 seule mesure suffisante à T et p donnés
- rhéomètre non nécessaire → viscosimètres $\mu = f(T, p)$
- Exemples de fluides newtoniens : eau, plupart des solvants, huiles minérales, etc.

La viscosité introduite plus haut est qualifiée de **viscosité dynamique** :

$$\boxed{\mu = \frac{\tau}{\dot{\epsilon}}} \quad \text{en Pa.s} \quad (5.2)$$

Elle est de l'ordre de 10^{-3} Pa.s pour l'eau. On peut également l'exprimer en poiseuille (Pl : 1 Pl = 1 Pa.s) ou en poise (Po : 1 Po = 0,1 Pa.s).

Il existe également une autre viscosité, la **viscosité cinématique** définie par :

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}} \quad \text{en m}^2.\text{s}^{-1} \quad (5.3)$$

Elle est de l'ordre de 10^{-6} m².s⁻¹ pour l'eau. Les deux viscosités dépendent de la température du fluide considéré.

5.3 Fluides newtoniens et phénomènes visqueux

5.3.1 Couche limite

La **couche Limite** (*Boundary Layer*) est la zone qui se développe entre une paroi solide et le reste de l'écoulement où la vitesse est inférieure à la vitesse infini amont U_∞ . À la paroi, la vitesse est nulle, et progressivement, la vitesse va augmenter pour atteindre U_∞ . Dans cette zone, le fluide est soumis à de fortes contraintes de cisaillement.

L'évolution est plutôt parabolique pour une couche limite laminaire, et logarithmique dans une couche limite turbulente. Cependant dans le cas des couches limites turbulentes, très proche de la paroi existe une zone où la couche limite est laminaire. Cette zone s'appelle la sous-couche visqueuse.

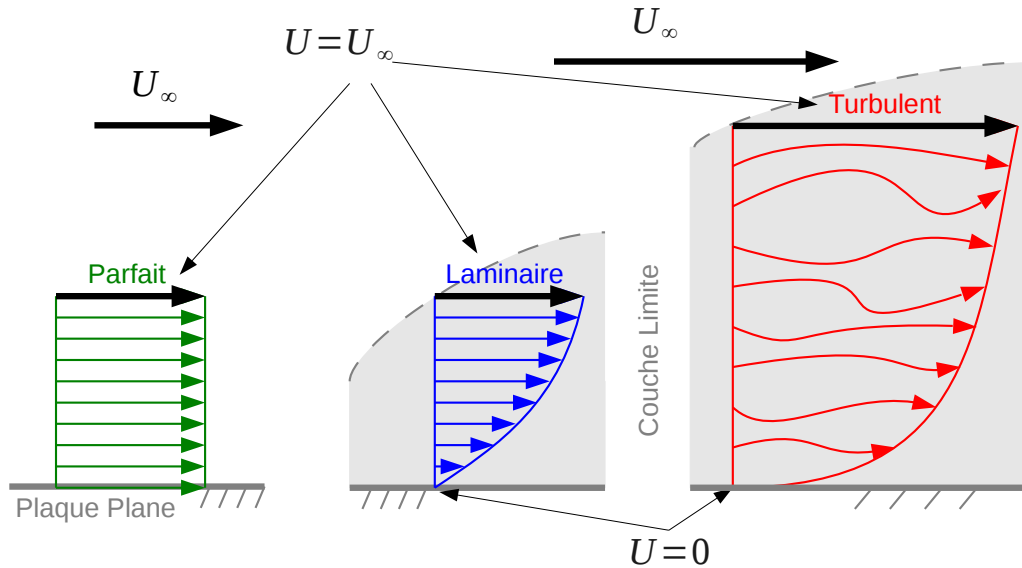


FIGURE 5.5 – Représentation schématique des couches limites laminaires et turbulentes

L'épaisseur de la couche limite δ est donnée par :

$$\delta \approx \sqrt{\nu t_{\text{ref}}} \approx \sqrt{\nu \frac{D_h}{U}} \dots \Rightarrow \delta \approx \frac{D_h}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (5.4)$$

Dans la zone de couche limite, les effets visqueux sont prépondérants. En dehors, l'écoulement peut être considéré comme parfait. Il est donc possible de ramener l'écoulement d'un fluide réel à celui d'un fluide parfait en confondant la surface extérieure de la couche limite avec celle de l'obstacle.

En fluide parfait, $\mu \rightarrow 0$ et $\text{Re} \rightarrow \infty$ et il n'existe pas de couche limite. À contrario, à $\text{Re} \leq 1$, les effets visqueux se ressentent dans tout l'écoulement et la couche limite occupe la totalité du domaine de l'écoulement ; dans ce cas aussi, il n'est plus possible de parler de couche limite.

5.3.2 Point de décollement

Parfois la typologie de l'écoulement et/ou de la paroi solide fait qu'un **décollement de la couche limite** apparaît (cf. Fig. 5.6), donnant naissance à un sillage. L'effet de la viscosité n'est plus confiné au voisinage de l'obstacle et devient plus importante. Le point où se situe le décollement est une zone de ralentissement. En amont de ce point, $\partial U/\partial x > 0$ et $\partial p/\partial x < 0$ alors qu'en aval, $\partial U/\partial x < 0$ et $\partial p/\partial x > 0$ (cf. Fig. 5.7).

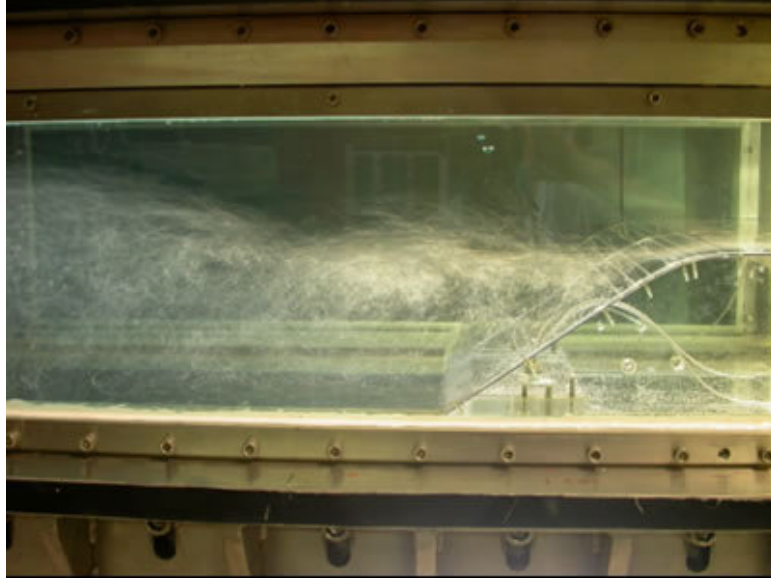


FIGURE 5.6 – Photographie d'un décollement et de l'apparition d'une zone de recirculation

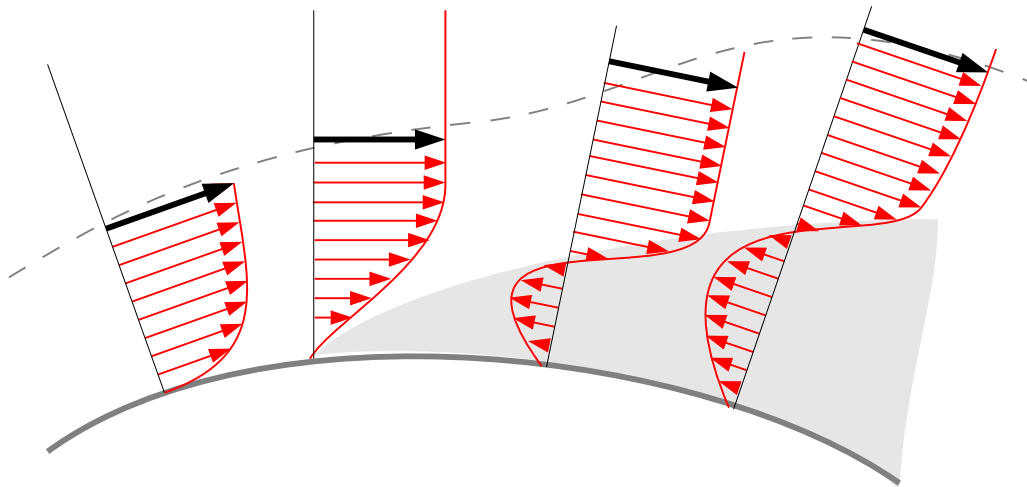


FIGURE 5.7 – Représentation schématique de l'évolution de la couche limite dans un décollement

La typologie des couches limites et l'existence ou non de points de décollement et de zones de recirculation évolue avec la vitesse de l'écoulement. Comme l'illustre la Fig. 5.8 p. 62 dans le cas d'un cylindre seul, on passe progressivement d'un écoulement rampant avec l'ensemble des couches limites laminaires à un écoulement transcritique où l'ensemble des couches limites sont turbulentes.

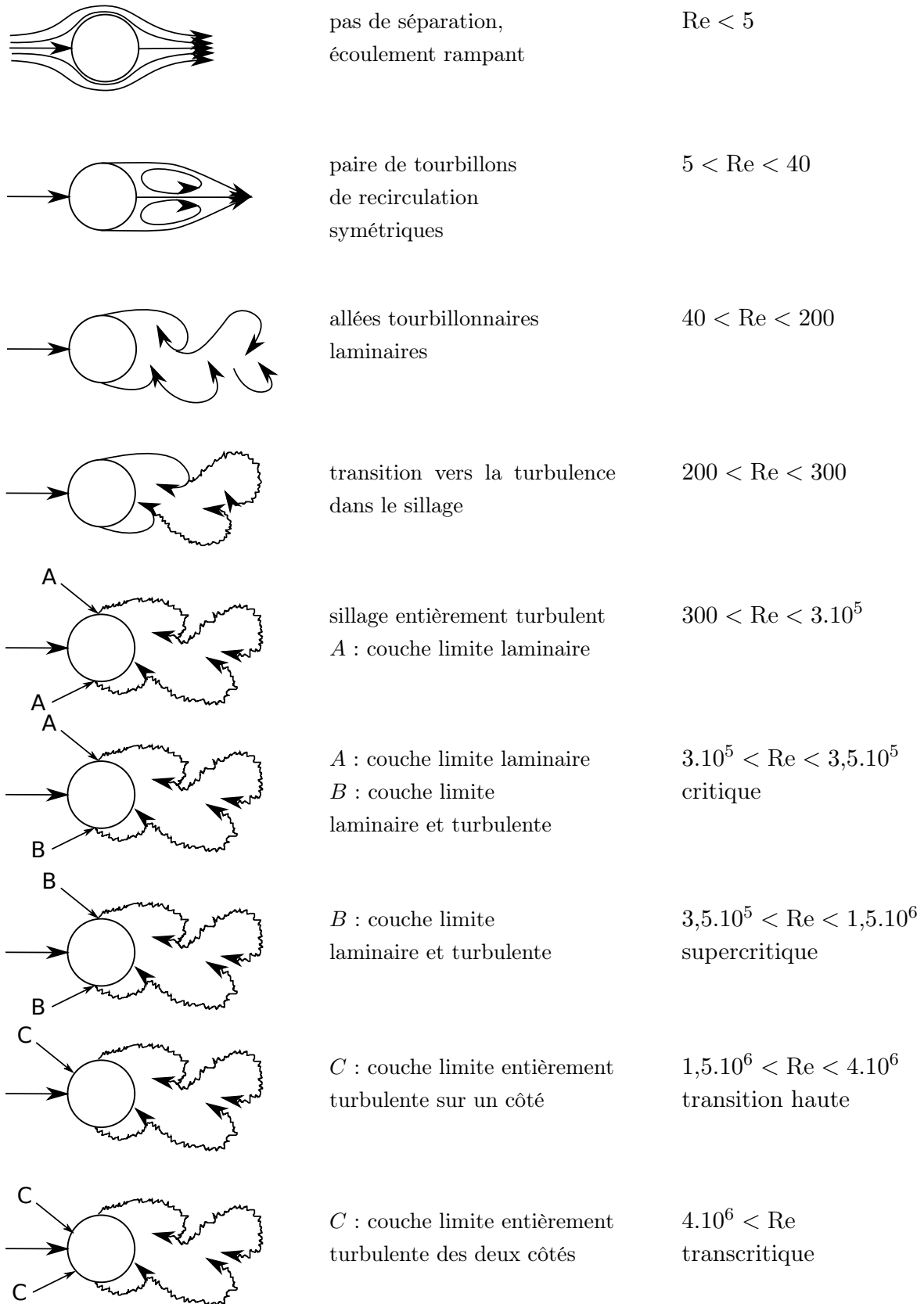


FIGURE 5.8 – Évolution de l'état de la couche limite en fonction du nombre de Reynolds dans un écoulement autour d'un cylindre fixe



<http://matwo.fr/ensam>

Dynamique des fluides en fluide visqueux

Sommaire

6.1	Équation de Navier-Stokes	63
6.2	Régimes d'écoulement	64
6.2.1	Régime laminaire	65
6.2.2	Régime turbulent	65
6.2.3	Régimes laminaires et turbulents dans une conduite	66
6.3	Nombre de Reynolds	66
6.4	Notion de pertes de charges	67
6.5	Pertes de charges linéaires	68
6.6	Pertes de charges singulières	71

Nous allons maintenant considérer les fluides réels ($\mu \neq 0$) newtoniens ($\tau \propto \dot{\epsilon}$).

6.1 Équation de Navier-Stokes

En procédant de même que pour l'équation d'Euler (cf. § 4.2, p. 46) et en prenant en compte les effets visqueux, nous obtenons l'équation de Navier¹ (ou équation de bilan de quantité de mouvement) :

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{div } \overline{\overline{\tau}} \quad (6.1)$$

avec $\overline{\overline{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses en [Pa].

Nous utiliserons plutôt la version appliquée aux fluides visqueux newtoniens incompressibles, ce qui nous amène à une formulation de l'équation de **Navier-Stokes**² :

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \left[(\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{U} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{U} \quad (6.2)$$

Ces équations sont couplées aux équations de continuité (cf. Éq. (4.3) p. 47), qui pour rappel, donne pour un fluide visqueux newtonien incompressible :

$$\left(\text{div } \vec{U} \right) = 0 \quad (6.3)$$

1. FR Claude Louis Marie Henri NAVIER, 1785-1836
 2. UK George Gabriel STOKES, 1819-1903

6.2 Régimes d'écoulement

L'expérience de Reynolds³ a été réalisée en 1883. Il s'agit sans doute de la première véritable expérience de visualisation. Elle consiste à observer l'écoulement d'un liquide dans un tube transparent dont la paroi intérieure est peu rugueuse.

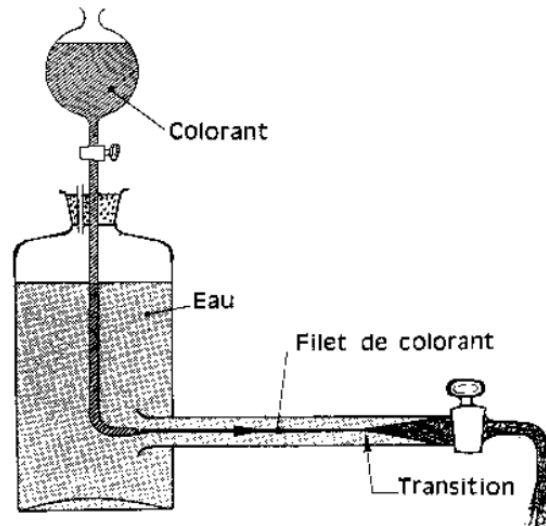


FIGURE 6.1 – Dispositif de l'expérience de Reynolds

Grâce à cette expérience, différents régimes d'écoulement ont pu être identifiés. À l'heure actuelle, cette notion de régime d'écoulement nous permet encore de dimensionner les réseaux aérauliques et hydrauliques de distribution de fluide.

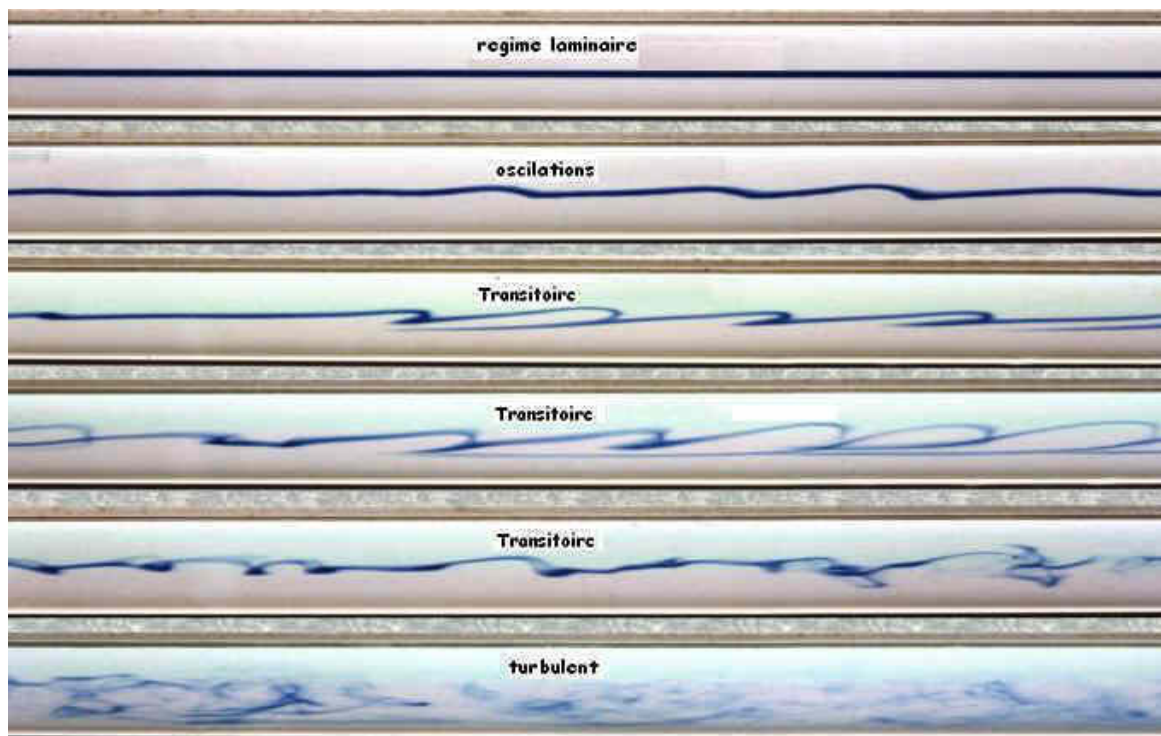


FIGURE 6.2 – Régimes d'écoulements dans une conduite circulaire pleine transparente

3. ■ ■ IR Osborne REYNOLDS, 1842-1912

Dans les conduites industrielles en charge (pleines de fluide) :

- régime laminaire : $Re < 2000$
- régime turbulent : $Re > 3000$



Ces valeurs limites du nombre de Reynolds sont empiriques et à manier avec précaution. Dans la littérature, ces valeurs peuvent différer d'une source à l'autre. **Elles ne sont valables que pour des écoulements de fluides dans des conduites industrielles.**

6.2.1 Régime laminaire

Ce régime se caractérise par une trajectoire des particules de fluide parallèle à l'axe de la conduite. Le fluide se meut en couches qui glissent les unes sur les autres sans se mélanger. Les forces dues à la viscosité sont prépondérantes et évitent la formation de remous ou de tourbillons.

Ce type d'écoulement est bien souvent stationnaire dans les conduites pleines. Chaque particule de fluide est caractérisée par une énergie stable, bien définie et invariable dans le temps. En effet, en tout point de l'espace de la veine fluide, les grandeurs vitesse, masse volumique et pression d'un élément de fluide en circulation ne dépendent pas du temps. Par contre, dans les écoulements externes (autour de cylindres ou d'ailes d'avion notamment) le régime laminaire peut être instationnaire (cf. § 3.3.1, p. 38).

Dans une conduite, le profil des vitesses est fortement influencé par les effets visqueux. La vitesse réelle n'est pas uniforme dans la section de la conduite. En effet, les couches voisines de la paroi sont plus influencées par le ralentissement dû au frottement contre la paroi solide que les filets circulants près de l'axe. La vitesse dans une section est maximale sur l'axe et devient nulle à la paroi.

6.2.2 Régime turbulent

Le régime turbulent est caractérisé par un ensemble de mouvements tourbillonnaires dont les formes et les dimensions sont aléatoires dans le temps et dans l'espace. Un véritable chaos qui tourmente les scientifiques depuis plus de deux siècles :

« Peut-on définir la turbulence ? Travailler sur la turbulence, c'est tenter de prévoir l'imprévisible. »

M. LESIEUR⁴

Malgré les trajectoires aléatoires des particules de fluide dans ce type d'écoulement, le caractère diffusif⁵ de cette turbulence permet d'obtenir statistiquement⁶ des valeurs moyennes stables (pression, vitesse, etc.) en chaque point du fluide. Ainsi, un régime turbulent n'est pas forcément instationnaire.

4.  FR Marcel LESIEUR, 1945-...

5. La turbulence augmente le taux de mélange et de diffusion (température par exemple)

6. Au sens mathématique de la moyenne statistique

6.2.3 Régimes laminaires et turbulents dans une conduite

L'influence du régime en hydraulique apparaît dans l'allure du profil des vitesses (cf. Fig. 6.3, p. 66).

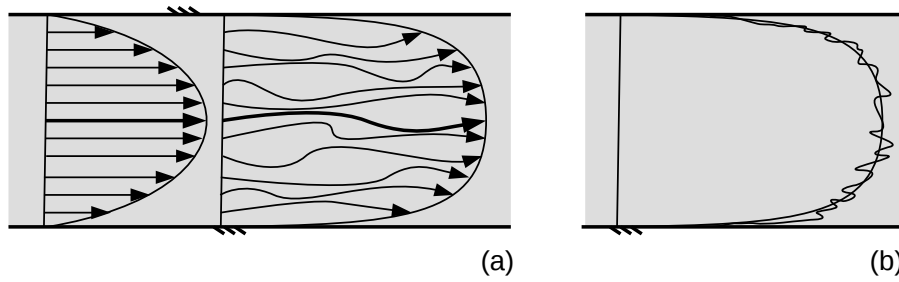


FIGURE 6.3 – (a) Comparaison du profil de vitesse laminaire (parabolique) et turbulent (logarithmique), (b) superposition du profil de vitesse turbulent instantané et moyenné.

6.3 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre adimensionnel (sans dimension) qui représente le rapport entre :

— les effets inertiels (cf. Éq. (6.2) p. 63)

$$\rho (\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U)$$

— et les effets visqueux

$$\mu \Delta \vec{U}$$

ce qui donne pour un écoulement unidimensionnel :

$$\text{Re} = \frac{\rho (\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U)}{\mu \Delta \vec{U}} = \frac{\rho U_{\text{ref.}} L_{\text{ref.}}}{\mu} = \frac{U_{\text{ref.}} L_{\text{ref.}}}{\nu} \quad (6.4)$$

En hydraulique, la vitesse de référence est la vitesse débitante U_d (qu'on notera U par la suite) comme le rapport du débit volumique et de la section de passage :

$$U_{\text{ref.}} = U_d = U = \frac{q_v}{S} \quad (6.5)$$

De même, la longueur de référence est le diamètre hydraulique D_h qui est un multiple du rapport entre la section de passage S du fluide et le périmètre mouillé de la conduite P :

$$L_{\text{ref.}} = D_h = \frac{4 S}{P} \quad (6.6)$$

In fine, pour les écoulements industriels dans des conduites :

$$\text{Re} = \frac{U D_h}{\nu} = \frac{\rho U D_h}{\mu} \quad (6.7)$$



pour une conduite circulaire de diamètre D pleine (en charge)



$$L_{\text{ref.}} = D_h \neq L_{\text{conduite}}$$

6.4 Notion de pertes de charges

Considérant un fluide visqueux, nous ne pouvons plus considérer que l'énergie au début de la ligne de courant est la même qu'à la fin de cette même ligne de courant. En effet, la viscosité va générer un frottement visqueux entre le fluide et les parois solides qui va entraîner une perte d'énergie. La charge ne conserve plus, il faut donc arriver à quantifier ces **pertes de charge**.

Le théorème de Bernoulli s'écrivait pour un fluide parfait $E_i = cte \quad \forall i$ sur une même ligne de courant avec E la charge hydraulique :

$$E_i = p_i + \rho g z_i + \frac{1}{2} \rho U_i^2 \quad (6.8)$$

En prenant en compte les effets visqueux, le théorème de Bernoulli s'écrit désormais :

$$\underbrace{p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2}_{E_1} = \underbrace{p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2}_{E_2} + \delta E_{1 \rightarrow 2} \quad (6.9)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{E_1 = E_2 + \delta E_{1 \rightarrow 2}} \quad \text{avec } \delta E_{1 \rightarrow 2} \geq 0 \text{ car } E_1 \geq E_2 \quad (6.10)$$

Pour les écoulements industriels dans des conduites, les pertes de charges $\delta E_{1 \rightarrow 2}$ peuvent être réparties en deux catégories :

- les pertes de charges linéaires (ou linéiques, ou régulières)
- les pertes de charges singulières (ou ponctuelles)

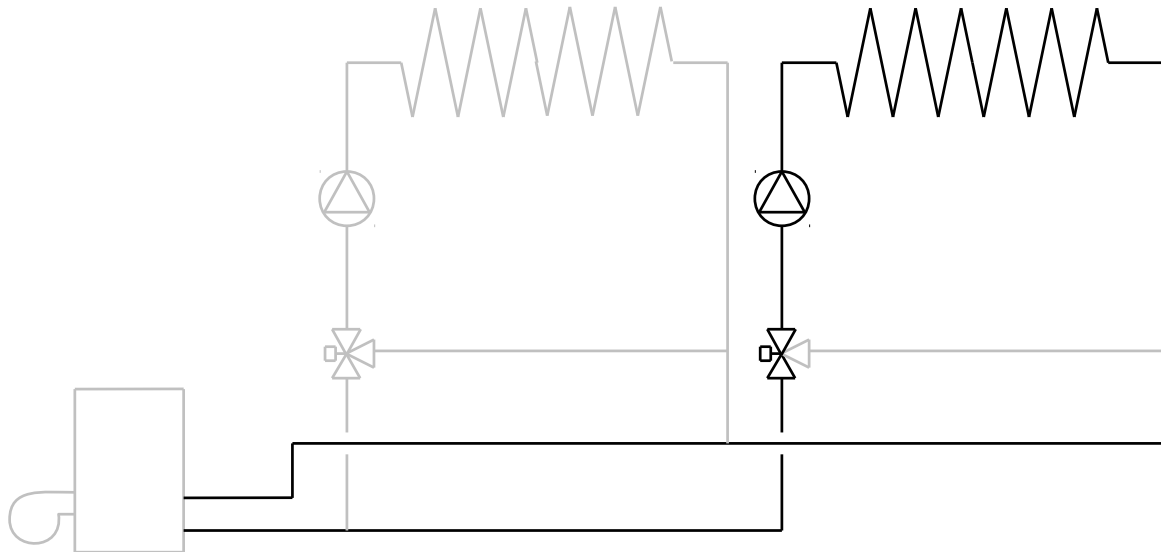


FIGURE 6.4 – Montage en mélange de deux radiateurs thermiques alimentés par une chaudière

Par exemple sur la Fig. 6.4, le circuit mis en évidence comptabilise :

- 10 tronçons droits⁷ (donc 10 pertes de charges linéiques)
- 8 accidents : coudes à 90°, radiateur, vanne (donc 8 pertes de charges ponctuelles)

la perte de charge totale du réseau sera la somme totale des 18 pertes de charges énumérées ci-dessus.

⁷ même diamètre

6.5 Pertes de charges linéaires

Il est possible de déterminer la valeur d'une perte de charge linéaire avec l'équation de Darcy⁸-Weisbach⁹ :

$$\delta E_{1 \rightarrow 2}^L = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \rho U_2^2 \quad (6.11)$$

L et D_h sont respectivement la longueur et le diamètre hydraulique intérieur du tronçon considéré. λ , coefficient sans dimension, est le coefficient de perte de charge linéaire.

Le diagramme de Moody p. 69 nous permet de déterminer graphiquement ce coefficient.

Il est intéressant de constater que nous pouvons distinguer deux régimes en plus des régimes laminaires et turbulents : le régime **hydrauliquement lisse**, le régime **hydrauliquement rugueux** (au delà de $Re=10^5$).

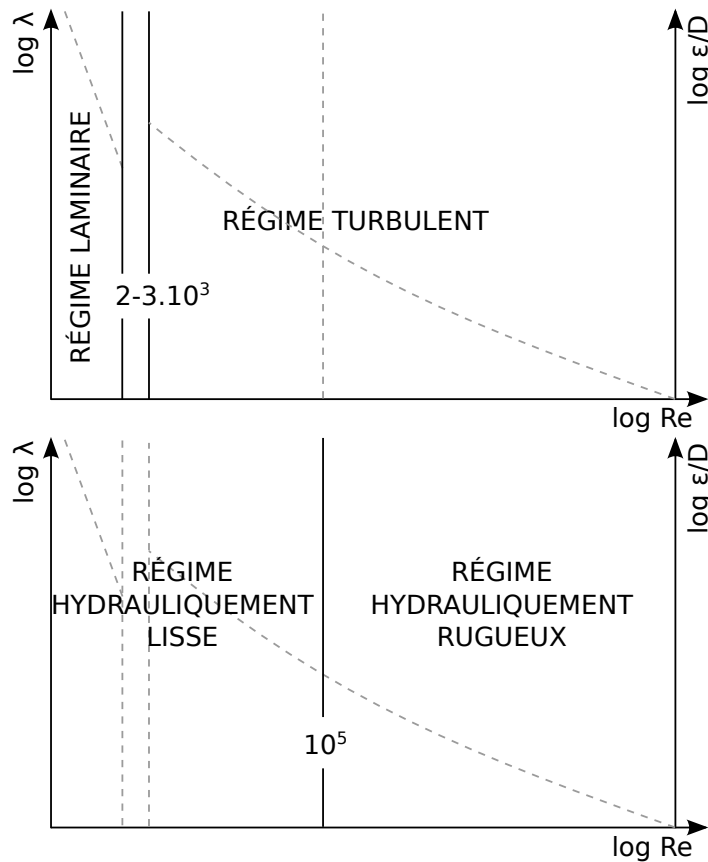


FIGURE 6.5 – Représentations schématiques du diagramme de Moody

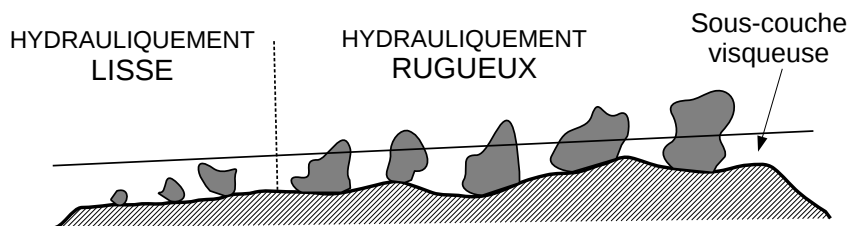



FIGURE 6.6 – Épaisseur de sous-couche visqueuse et régimes hydrauliquement lisses et rugueux.

8.  FR Henry DARCY, 1803-1858

9.  DE Julius Ludwig WEISBACH, 1806-1871

Moody Diagram

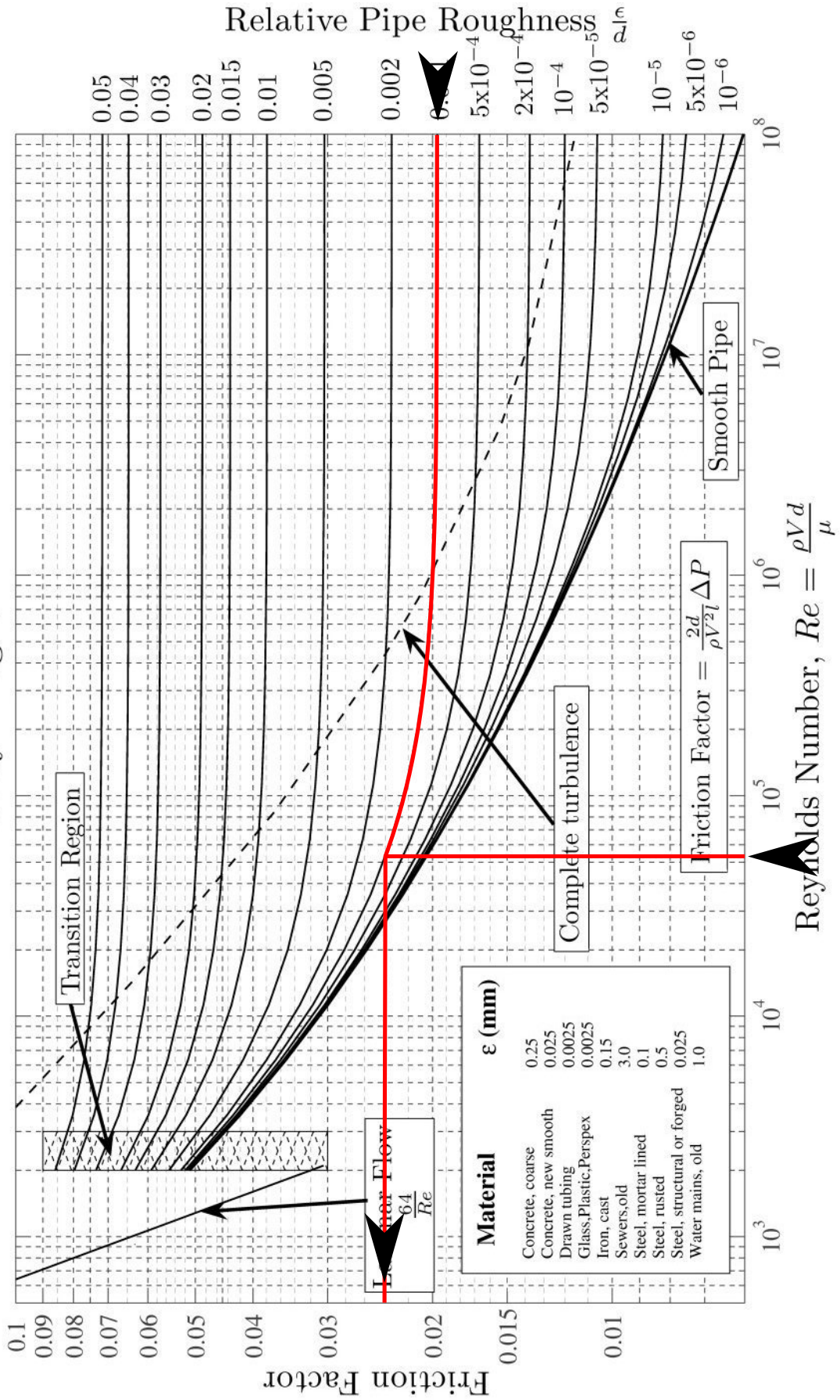


FIGURE 6.7 – Diagramme de Moody (λ est qualifié ici de *friction factor*)

Il existe également des formules qui nous permettent d'obtenir numériquement une valeur du coefficient de perte de charge linéaire suivant le régime d'écoulement : laminaire, lisse, rugueux, turbulent, etc.

En régime laminaire, la valeur du nombre de Reynolds est suffisant pour déterminer ce coefficient via la formule d'Hagen¹⁰-Poiseuille¹¹

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (6.12)$$

En régime turbulent, en plus du nombre de Reynolds, il faut connaître la rugosité de la conduite ε et s'orienter soit vers le diagramme de Moody (cf. Fig. 6.7, p. 69) soit vers des corrélations. Dans tous les cas, la formule de Colebrook reste valable :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon}{3,71 D_h} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right] \quad (6.13)$$

En régime lisse, la hauteur des aspérités de la paroi (liée à la rugosité) est beaucoup plus petite que l'épaisseur de la sous-couche laminaire. Le noyau turbulent n'est alors pas influencé par la rugosité de la conduite. Le coefficient de perte de charge peut alors être retrouvé par la formule implicite de Nikuradse¹² :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\text{Re} \sqrt{\lambda} \right) - 0,8 \quad (\text{Re} < 10^5) \quad (6.14)$$

En régime rugueux, la hauteur des aspérités de la paroi est beaucoup plus grande que l'épaisseur de la sous-couche laminaire. L'écoulement du noyau turbulent est fortement perturbé par ce relief. Le coefficient de perte de charge peut cette fois-ci être retrouvé par la seconde formule implicite de Nikuradse :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{D_h} \right) + 1,133 \quad (\text{Re} > 10^5) \quad (6.15)$$

Nous retombons alors sur les observations¹³ de Reynolds :

« The resistance is generally proportional to the square of the velocity, and when this is not the case, it takes a simpler form and is proportional to the velocity. »

En régime turbulent, la corrélation de Haaland, valable pour les conduites circulaires pleines, reste largement utilisée :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \log \left[\frac{6,9}{\text{Re}} + \left(\frac{\varepsilon}{3,7 D} \right)^{1,11} \right] \quad (\text{Re} > 3000) \quad (6.16)$$

10.  DE Gotthilf Heinrich Ludwig HAGEN, 1797-1884

11.  FR Jean Léonard Marie POISEUILLE, 1797-1869

12.  DE Johann NIKURADSE, 1894-1979

13. p. 936, *An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, O. Reynolds, 1883

6.6 Pertes de charges singulières

Ces pertes de charges peuvent être évaluées avec la formule suivante :

$$\boxed{\delta E_{1 \rightarrow 2}^S = \xi \frac{1}{2} \rho U_1^2} \quad (6.17)$$

avec ξ ou ζ le coefficient de perte de charge singulière (sans dimension) pouvant varier de 0,1 à 10 suivant l'accident rencontré.



<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

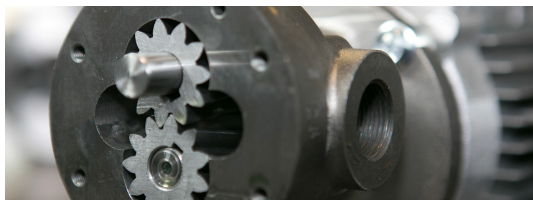
7.1	Classification des machines fluides	74
7.1.1	Machines volumétriques	74
7.1.2	Turbomachines	75
7.2	Dimensionnement d'une turbomachine	76
7.2.1	Caractérisation de la turbomachine : hauteur manométrique	76
7.2.2	Caractérisation du réseau	78
7.2.3	Interaction entre turbomachine et réseau : point de fonctionnement	79
7.2.4	Ordres de grandeur des puissances de pompes	80
7.3	Couplage de machines fluides	81
7.3.1	Couplage en série de deux pompes identiques	81
7.3.2	Couplage en parallèle de deux pompes identiques	82

Une machine fluide va permettre soit :

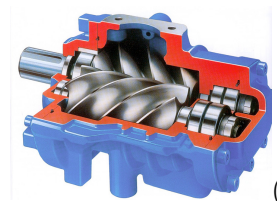
- un échange d'énergie entre système mécanique et **fluide**
ex : pompes, ventilateurs, compresseurs, turbines, etc.
- un échange d'énergie entre deux systèmes mécaniques via un **fluide**
ex : coupleurs hydrauliques, convertisseurs de couple, etc.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 7.1 – (a) Pompe centrifuge, (b) Pompe à engrenage, (c) Compresseur à vis

Les machines fluides sont présentes dans de nombreux domaines de l'industrie :

hydraulique aménagement des barrages, accumulation, irrigation, distribution d'eau potable

nucléaires circulation du circuit primaire et secondaire des centrales nucléaires, turbines

génie climatique installations frigorifiques, PAC¹, CTA², circulateurs

propulsion maritime, aéronautique ou astronautique, automobile

1. Pompe À Chaleur

2. Centrale de Traitement d'Air

7.1 Classification des machines fluides

Il existe deux grandes catégories de machines fluides :

- les machines **volumétriques** (cf. § 7.1.1, p. 74)
- les **turbomachines** (cf. § 7.1.2, p. 75)

7.1.1 Machines volumétriques

Elles sont caractérisées par les éléments suivants :

- pas de communication entre l'entrée et la sortie ; sans rotation, il n'y a pas d'écoulement
- **alternatives** : plusieurs cavités à volumes variables (chambre à piston)
- **rotatives** : plusieurs cavités se déplaçant de manière continue (engrenages)

Dans ces types de machines fluides, nous sommes en présence de trois phases périodiques :

1. admission
2. évolution en vase clos
3. échappement

Le débit-volume moyen s'obtient alors avec le rapport du volume des chambres et des séquences par unité de temps.

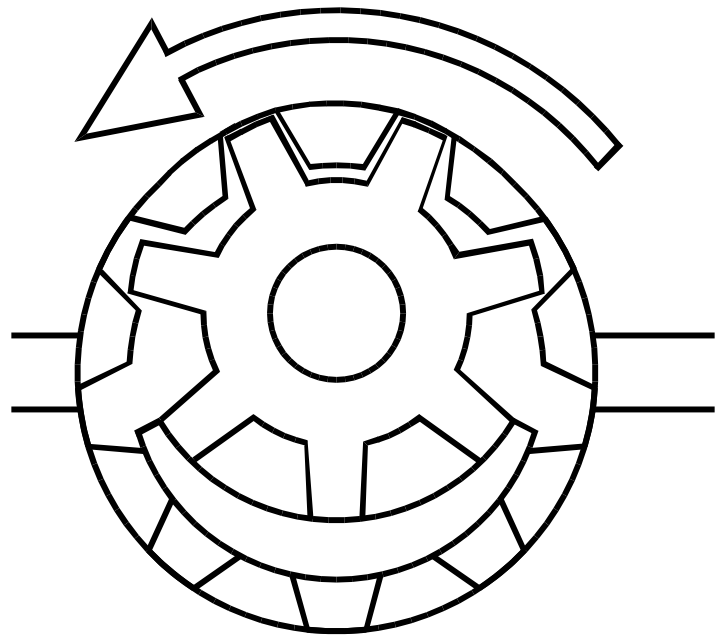


FIGURE 7.2 – Coupe schématique d'une pompe à engrenage (alim. en fioul d'un brûleur de chaudière)

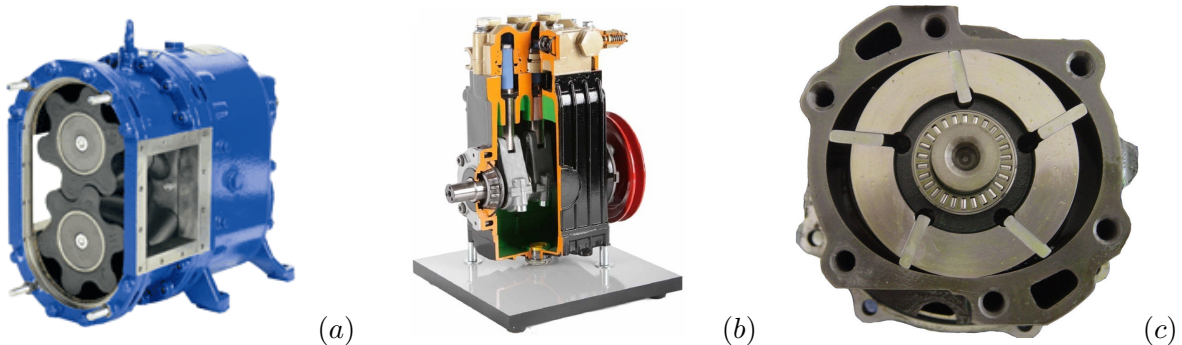


FIGURE 7.3 – Machines volumétriques : (a) à engrenages, (b) à piston, (c) à palettes

7.1.2 Turbomachines

Elles sont caractérisées par les éléments suivants :

- application d'un couple au fluide
 - organe tournant : rotor ou roue dotée d'aubes ou d'aubages
 - écoulement continu, l'entrée communique avec la sortie
- ex : pompe centrifuge, hélice, éolienne, turbine hydraulique, etc.

Turbomachines axiales : aspiration \parallel axe de rotation \parallel refoulement

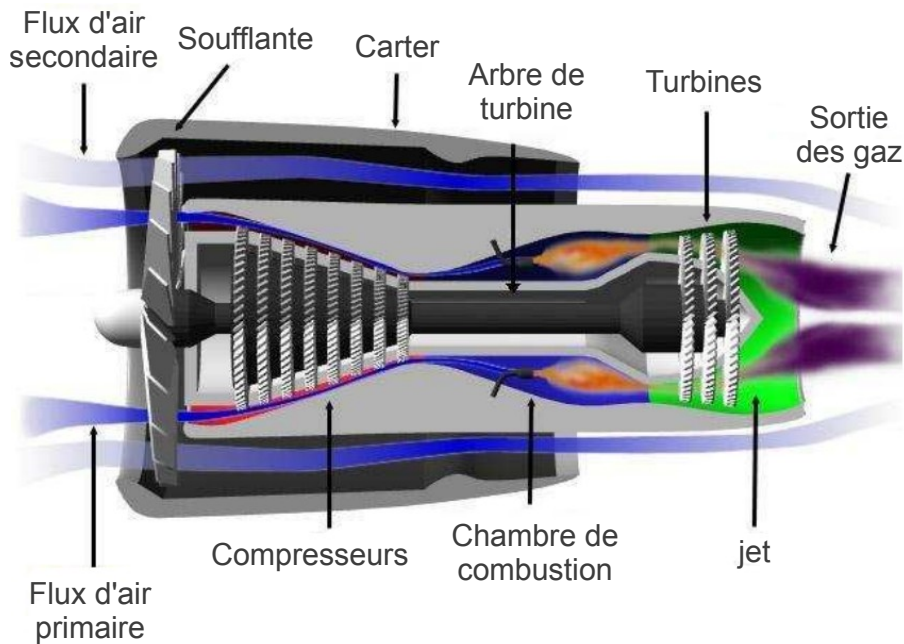


FIGURE 7.4 – Schéma de fonctionnement d'un turboréacteur

Turbomachines radiales : aspiration \parallel axe de rotation \perp refoulement

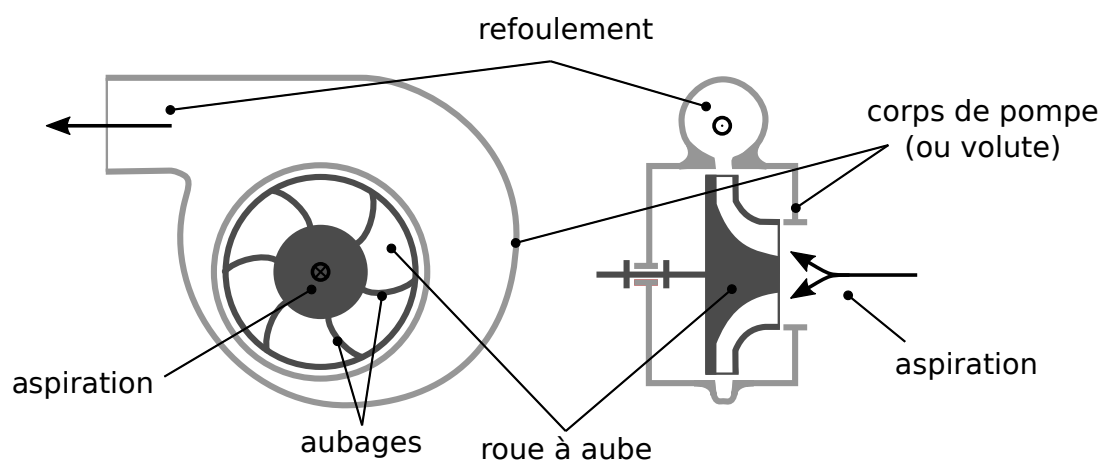


FIGURE 7.5 – Coupes schématiques d'une pompe centrifuge

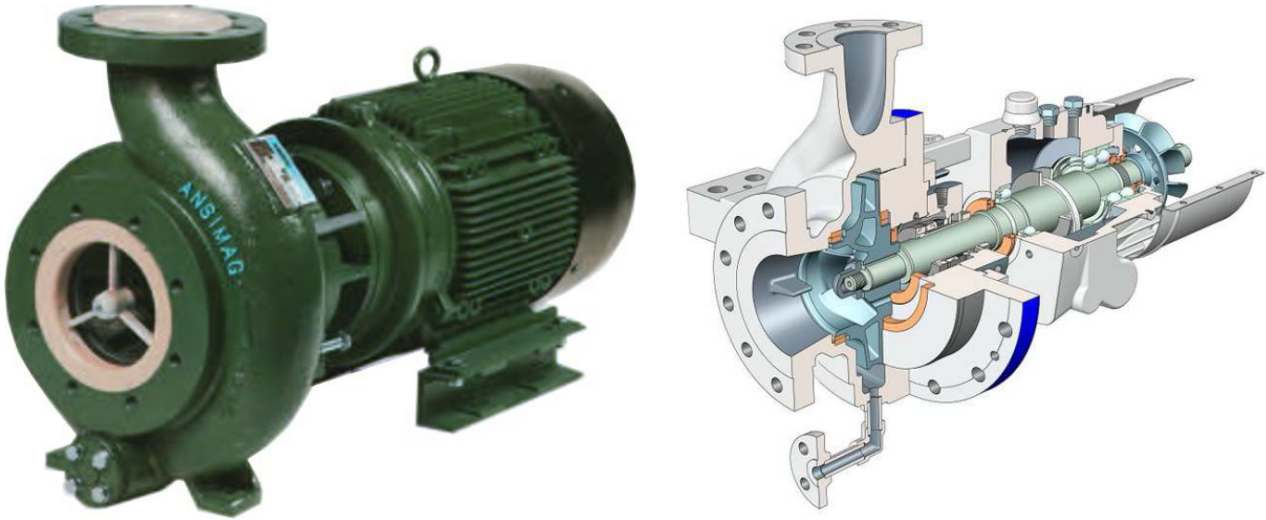


FIGURE 7.6 – Pompes centrifuges

7.2 Dimensionnement d'une turbomachine

Le dimensionnement d'une turbomachine est la démarche qui vise à sélectionner le modèle adapté aux besoins du cahier des charges (débit, pression, typologie du réseau).

7.2.1 Caractérisation de la turbomachine : hauteur manométrique

La charge manométrique δW en [Pa] d'une turbomachine est définie par :

$$\delta W = \frac{P_h}{q_v} \quad (7.1)$$

avec P_h la puissance **hydraulique** en [W] et q_v le débit volumique en [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$].

La charge manométrique représente le **travail des parois mobiles par unité de volume** : [$\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$] = [Pa].

Par convention :

- $\delta W > 0$ pour une turbomachine génératrice (ex. : pompe, ventilateur, compresseur, hélice, etc.)
- $\delta W < 0$ pour une turbomachine réceptrice (ex. : turbine, éolienne, moulin à vent, etc.)

La **hauteur manométrique** est définie par :

$$H_{\text{mano}} = \frac{\delta W}{\rho g} \quad (7.2)$$

La hauteur manométrique (HMT) est homogène à une longueur. Si $\rho = \rho_{\text{eau}}$, alors l'unité de la hauteur manométrique sera le mètre de colonne d'eau [mCE].

Le tracé de la hauteur manométrique d'une pompe en fonction du débit qu'elle délivre est la **courbe caractéristique de la pompe**. Elle est donnée directement par le constructeur.



Mais alors, la puissance hydraulique est donnée par

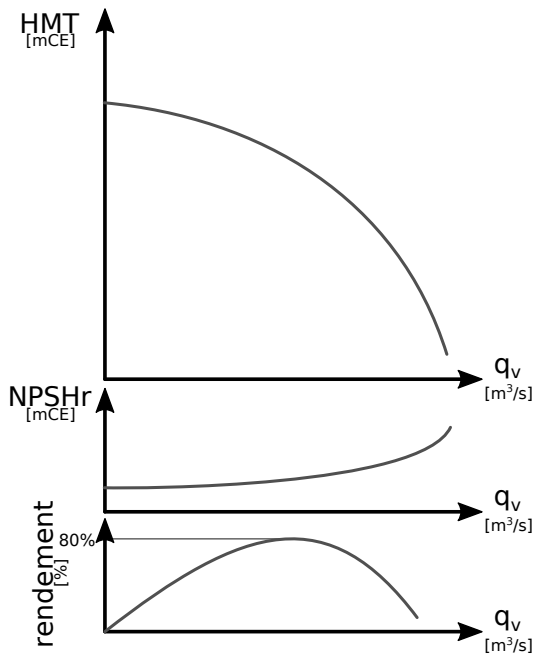
$$P_h = \delta W q_v$$

Et non pas par

$$P_h = \Delta p q_v$$

?!

Pompe à vitesse fixe



Pompe à vitesse variable

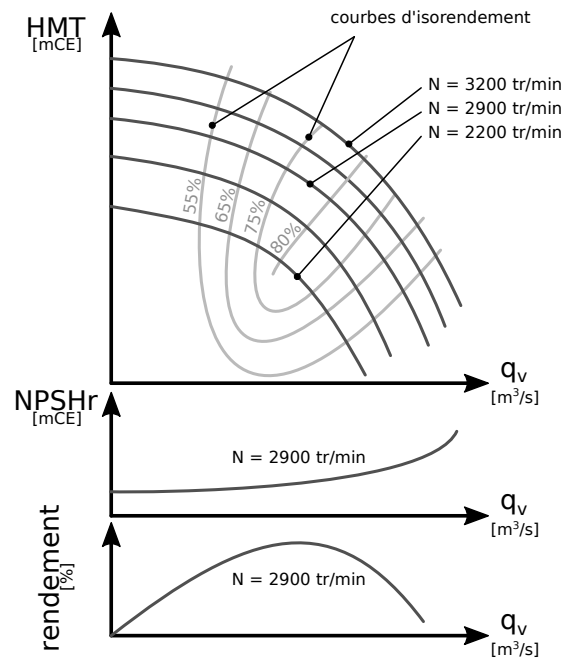


FIGURE 7.7 – Courbes caractéristiques de pompes à vitesse fixe et à vitesse variable

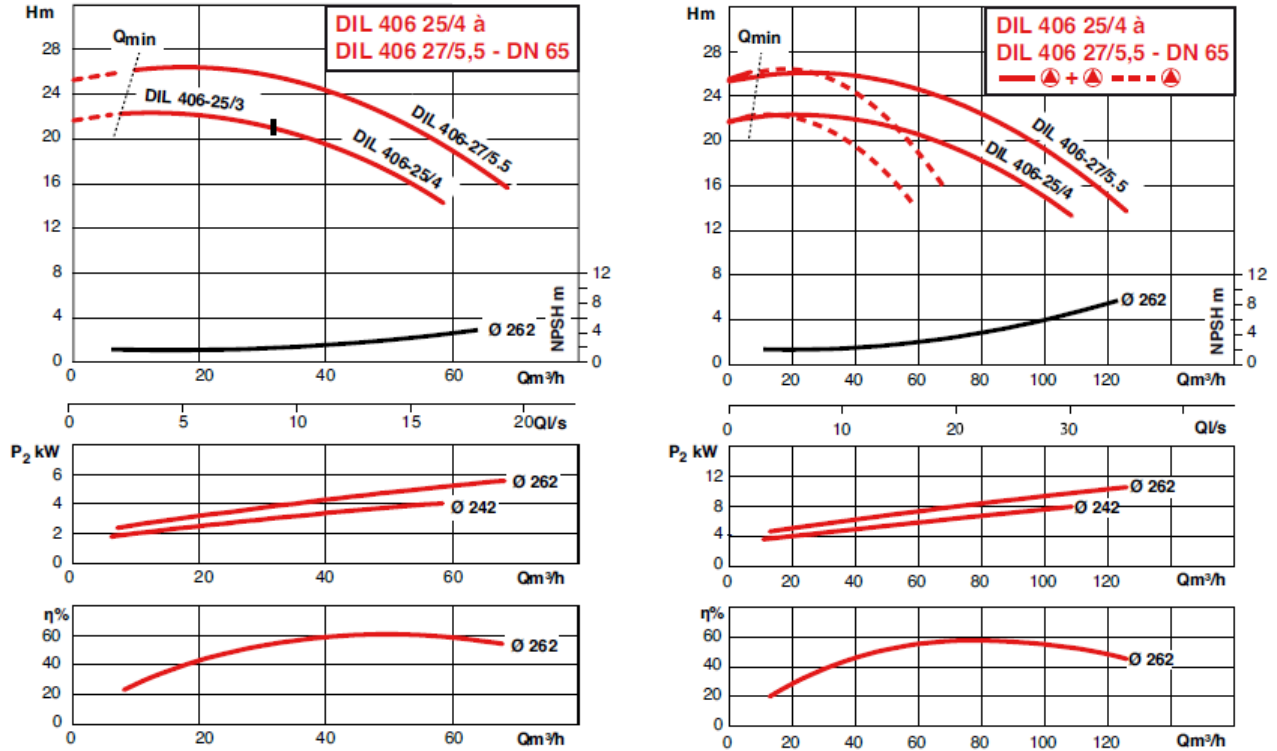


FIGURE 7.8 – Exemples de courbes caractéristiques d'une pompe issues de données constructeur

7.2.2 Caractérisation du réseau

Un réseau hydraulique (ou circuit) est un ensemble de conduites et d'éléments (coudes, vannes, piquage, etc.) continus. Si le réseau forme une boucle, on parlera de **fermé** (ex. : alimentation de radiateurs thermiques, cf. Fig. 7.9-(b)), sinon, de réseau **ouvert** (ex. : alimentation d'un réservoir à partir d'un bassin, cf. Fig. 7.9-(a)).

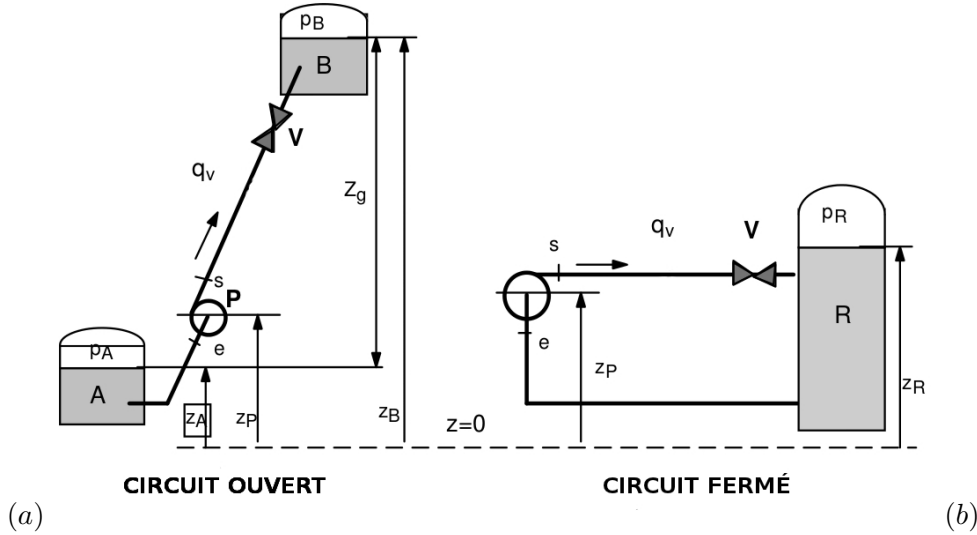


FIGURE 7.9 – Exemples de réseau ouvert (a) et de réseau fermé (b)

Les courbes caractéristiques des pompes sont données par le constructeur. Les courbes caractéristiques du réseau sont calculées.

$$f(q_v) = E_2 - E_1 + \delta E_{1 \rightarrow 2}$$

Pour rappel, les pertes de charges peuvent être séparées en deux catégories (cf. § 6.4, p. 67) :

- **singulières** : localisées, changement de direction, de section, obstacles, etc.
- **linéaires** : pertes d'énergie par frottement dans les tronçons rectilignes

La perte de charge totale s'obtient en sommant chacune des pertes de charges énumérées. Avec un découpage du réseau en n segments rectilignes et en p singularités, la perte de charge totale peut s'écrire :

$$\delta E_{A \rightarrow B} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \left(\frac{1}{2} \rho U_i^2 \right) + \sum_{j=1}^p \xi_j \left(\frac{1}{2} \rho U_j^2 \right) \quad (7.3)$$

En première approximation, nous pouvons considérer que les coefficients de pertes de charges λ et ξ ne dépendent pas du débit, et que les vitesses d'écoulement dans les différentes zones sont proches. Ces hypothèses nous permettent d'établir les liens de proportionnalité suivants :

$$\delta E_{A \rightarrow B} \propto U^2 \propto q_v^2 \quad (7.4)$$

L'allure d'une courbe caractéristique de réseau sera donc parabolique, avec une ordonnée à l'origine b telle que :

- $b = 0$ pour un circuit fermé
- $b = \Delta z + \Delta p (\rho g)^{-1}$ entre les deux réservoirs pour un circuit ouvert

$$f(q_v) = a q_v^2 + b \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

7.2.3 Interaction entre turbomachine et réseau : point de fonctionnement

Le dimensionnement des machines fluides dans un réseau donné va dépendre de nombreux paramètres :

- géométrie du circuit (altitude, longueurs, diamètres, rugosité)
- fluide considéré (viscosité, cavitation)
- type de machine (géométrie, vitesse de rotation)

Pour cela, nous allons utiliser la version généralisée du théorème de Bernoulli qui inclu le terme de charge manométrique :

$$\boxed{E_1 + \delta W = E_2 + \delta E_{1 \rightarrow 2}} \quad (7.5)$$

Lorsqu'une machine fluide sera disposée dans un réseau donné, l'ensemble de l'installation fonctionnera à un **débit** et à une **hauteur manométrique** donnée. Le **point de fonctionnement** de l'installation, regroupant ces deux informations, dépend uniquement de la machine fluide considérée et du réseau dans lequel elle est disposée.

Pour déterminer le point de fonctionnement, il est nécessaire de passer par une représentation dans le plan (H_{mano}, q_v) . Les courbes de machine fluide ou de réseau tracées dans ce plan sont appelées **courbes caractéristiques** (cf. Fig. 7.8).

La courbe caractéristique d'un réseau ne dépend pas uniquement du matériel qui le compose. Pour une vanne donnée, par exemple, on sera confronté à plusieurs ouvertures, qui feront varier le coefficient de perte de charge ponctuelle de la vanne ξ , et qui auront un impact sur le coefficient de proportionnalité entre la hauteur manométrique et le débit volumique. La Fig. 7.12 illustre la variation de la position du point de fonctionnement pour un réseau donné, sans vanne, avec une vanne grande ouverte (ouverture à 100%) et avec une vanne à moitié fermée.

$$\underbrace{\delta W}_{\text{pompe}} = \underbrace{E_2 - E_1 + \delta E_{1 \rightarrow 2}}_{\text{réseau}}$$

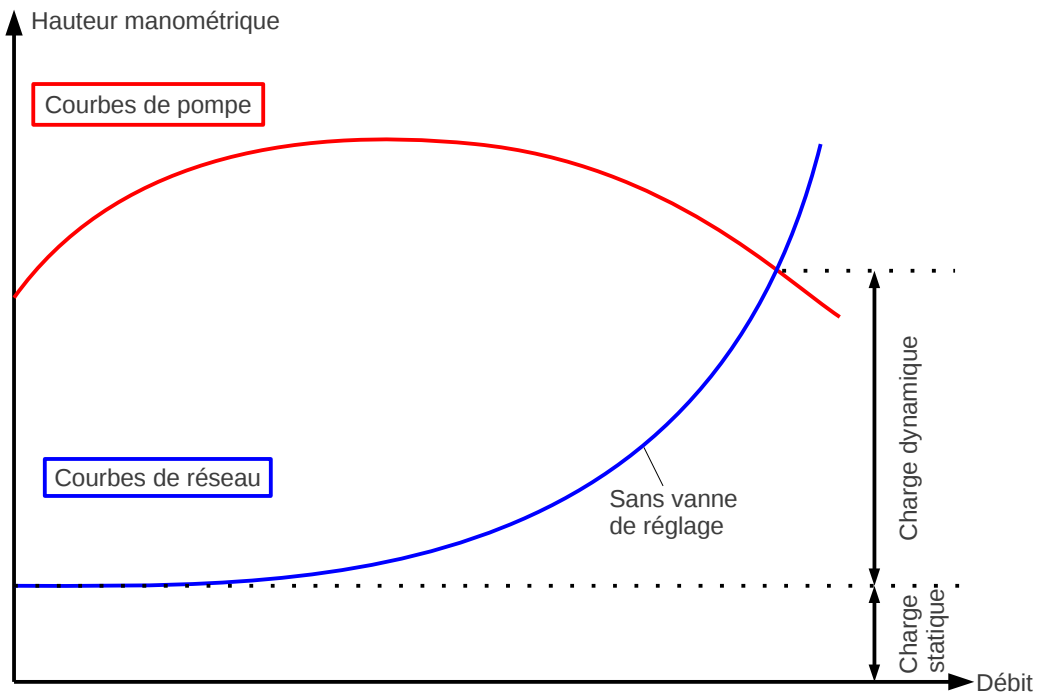


FIGURE 7.10 – Variation de la position du point de fonctionnement

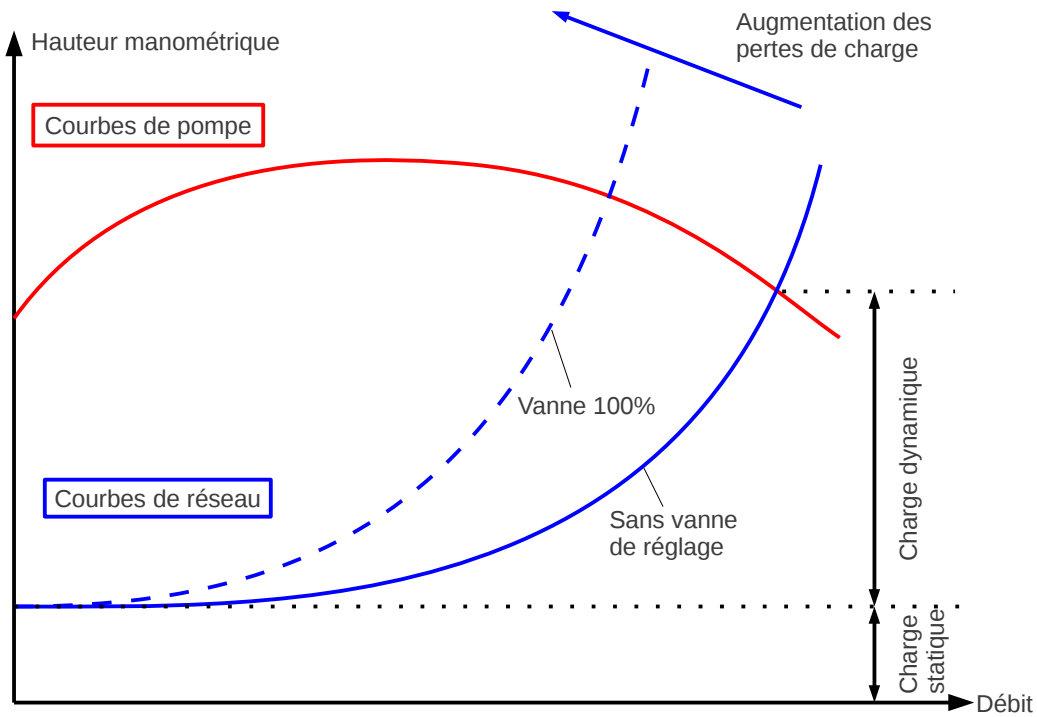


FIGURE 7.11 – Variation de la position du point de fonctionnement

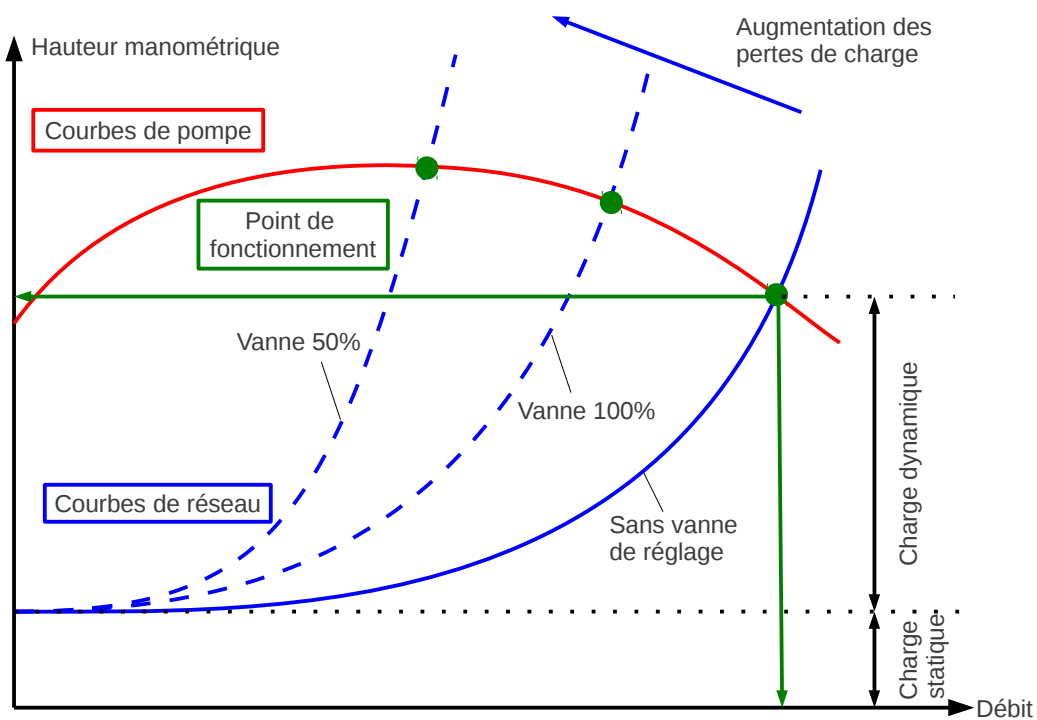


FIGURE 7.12 – Variation de la position du point de fonctionnement

7.2.4 Ordres de grandeur des puissances de pompes

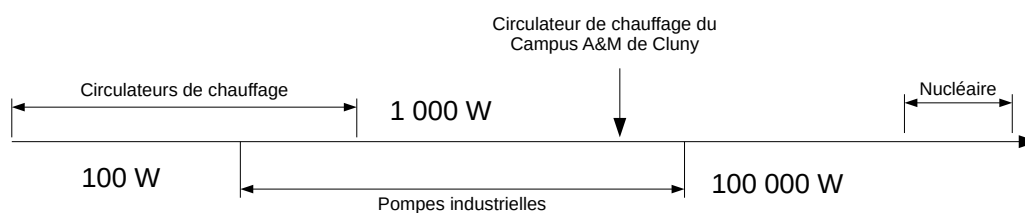


FIGURE 7.13 – Puissances consommées (majoritairement électrique) usuelles des pompes

7.3 Couplage de machines fluides

Il est courant de disposer des machines fluides l'une derrière l'autre (en série), ou côte à côte (en parallèle). Dans ces cas, les courbes caractéristiques résultantes de ce couplage ne sont bien sûr pas identiques à chacune des courbes caractéristiques des machines fluides seules. Il est par contre possible de déterminer la courbe résultante à partir de la courbe de la machine fluide seule.

Dans ce paragraphe, nous nous attacherons à déterminer les courbes caractéristiques résultantes pour deux pompes identiques.

7.3.1 Couplage en série de deux pompes identiques

Soient deux pompes A et B , q_v et H_{mano} le débit volumique et la hauteur manométrique fournis par une seule pompe. Par définition :

$$(q_v)_A = (q_v)_B \quad \text{et} \quad (H_{\text{mano}})_A = (H_{\text{mano}})_B \quad (7.6)$$

Lorsque ces deux pompes seront montées en série, le couplage engendrera les caractéristiques suivantes :

$$q_v = (q_v)_A = (q_v)_B \quad \text{et} \quad H_{\text{mano}} = (H_{\text{mano}})_A + (H_{\text{mano}})_B \quad (7.7)$$

Les hauteurs manométriques s'ajoutent tandis que le débit reste le même et égal à celui d'une pompe. Attention cependant au fait que si les machines sont de performances différentes, la moins débitante peut dissiper une partie de l'énergie fournie par l'autre.

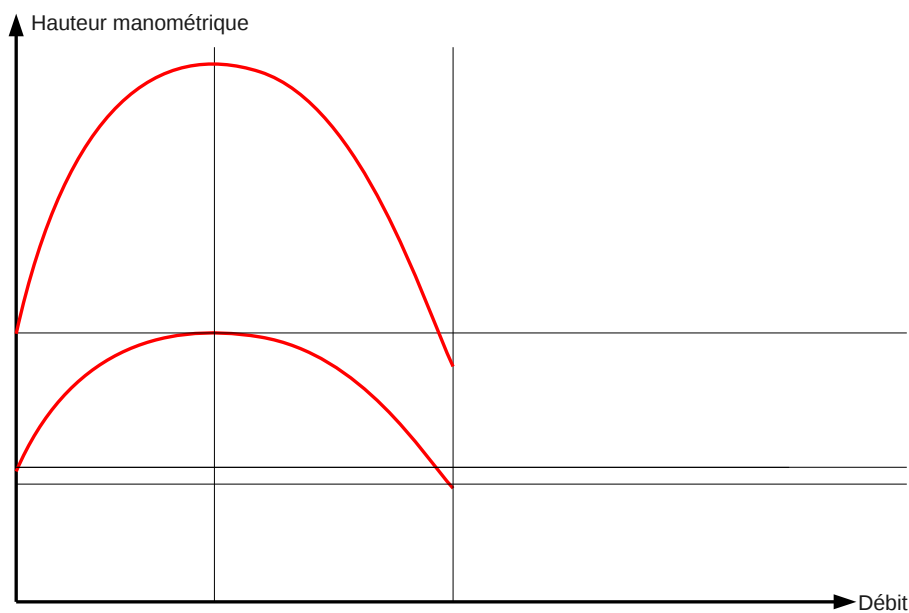


FIGURE 7.14 – Construction de la courbe caractéristique résultant d'un couplage de deux pompes identiques en série

7.3.2 Couplage en parallèle de deux pompes identiques

Lorsque ces deux pompes seront montées en parallèle, le couplage engendrera les caractéristiques suivantes :

$$q_v = (q_v)_A + (q_v)_B \quad \text{et} \quad H_{\text{mano}} = (H_{\text{mano}})_A = (H_{\text{mano}})_B \quad (7.8)$$

Les débits des pompes s'ajoutent alors que la hauteur manométrique reste identique. De même que dans le cas précédent, si les machines sont de performances différentes, la moins débitante peut être parcourue par un débit négatif.

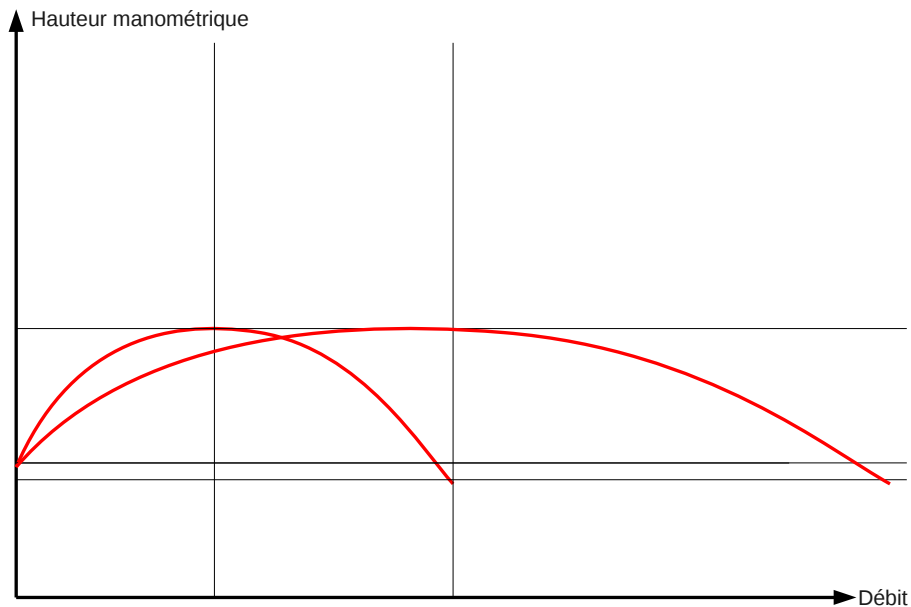


FIGURE 7.15 – Construction de la courbe caractéristique résultant d'un couplage de deux pompes identiques en parallèle



FIGURE 7.16 – Exemple de couplage en parallèle de 2 pompes identiques



<http://matwo.fr/ensam>

Similitudes et analyse dimensionnelle

Sommaire

8.1 Unités et système international	84
8.1.1 Unités du système international	84
8.1.2 Unités fondamentales du système international	84
8.2 Dépendance dimensionnelle	85
8.3 Nombre de grandeurs dimensionnellement indépendantes	87
8.4 Théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème des Π)	87
8.4.1 Théorème	87
8.4.2 Détermination des produits adimensionnels Π	88
8.5 Bilan de l'analyse dimensionnelle	91
8.6 Similitudes	91
8.6.1 Définition	91
8.6.2 Application	91
8.7 Limitations	92
8.7.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes	92
8.7.2 Similitudes partielles	94

Ce chapitre va nous permettre de faire des similitudes qui auront pour but :

- d'extrapoler des résultats d'une expérience à petite échelle à un cas à grande échelle (maquette d'avion dans une soufflerie, avion réel en plein vol)
- réduire les paramètres à faire varier lors d'études paramétriques
- apporter du sens à des équations complexes

Pour cela, nous devons au préalable rappeler quelques notions d'analyse dimensionnelle.

Introduction : système homogène d'unités

En considérant la loi fondamentale de la dynamique de Newton, deux choix s'offrent à nous quant au système d'unités à adopter :

- faire de l'unité de mesure de la force une unité dérivée des unités de masse, de longueur et de temps :

$$\boxed{F = m \gamma} \quad (8.1)$$

- conserver une constante étalon séparée K pour lier la force au produit $(m \gamma)$:

$$\boxed{F = K m \gamma} \quad K = \text{cte} \quad (8.2)$$

C'est évidemment le choix 1 qui sera retenu. Cependant, ce choix reconnaît implicitement la validité de la loi de Newton. A priori, si la loi de Newton n'est pas définie, l'unité de la force non plus...

8.1 Unités et système international

8.1.1 Unités du système international

Quelques unités suffisent à la construction de toutes les unités dérivées. Retenues en 1954, ces unités sont qualifiées d'unités du **système international** (unifié en 1960).

Ex. : le mètre, et son unité dérivée le miles

8.1.2 Unités fondamentales du système international

7 unités suffisent à exprimer l'ensemble des unités du systèmes international. Ces unités sont qualifiées d'unités **fondamentales** du système international. En faisant l'analogie avec l'algèbre linéaire, ces 7 unités constituent une base d'unités indépendantes.

mécaniques	masse	[kg]	M
	longueur	[m]	L
	temps	[s]	T
thermodynamiques	température	[K]	θ
	intensité électrique	[A]	I
	quantité de matière	[mol]	N
	intensité lumineuse	[cd]	J

Au niveau du vocabulaire, M est une dimension dont l'unité est le kilogramme.



Remarques :

- le symbole du Kelvin est K (et non pas °K)
- si le nom de l'unité provient d'une personne, la dénomination de l'unité ne prend pas de majuscule mais son symbole oui (seul le litre [L] peut prendre une majuscule par souci de lisibilité ^a)

^a. Les symboles L (majuscule) et l (minuscule) sont les deux symboles acceptés par le Comité international des poids et mesures pour représenter le litre. Il est conseillé d'utiliser la minuscule l chaque fois que possible par défaut, ou la majuscule L s'il y a risque de confusion avec le chiffre 1.

Toute unité peut s'écrire comme une combinaison des 7 dimensions fondamentales.

Pour une grandeur G :

$$\forall G, \exists (m, l, t, k, i, n, j) \in \mathbb{Q}^7$$

$$\boxed{[G] = M^m \cdot L^l \cdot T^t \cdot \theta^k \cdot I^i \cdot N^n \cdot J^j}$$
(8.3)

Ex. :

- vitesse : $[U] = L.T^{-1}$
- accélération : $[\gamma] = L.T^{-2}$
- force : $[F] = [M].[\gamma] = M.L.T^{-2}$



Écrire l'équation aux dimensions des grandeurs suivantes

1. champ de pesanteur g
2. pulsation ω
3. nombre de Reynolds, Re
4. énergie E
5. viscosité dynamique μ

8.2 Dépendance dimensionnelle

En reprenant l'exemple de la force :

$$[F] = [M].[\gamma] = M.L.T^{-2}$$
(8.4)

le fait de pouvoir écrire que $[F]$ « est homogène à » $[M].[\gamma]$ signifie que $[F]$, $[M]$ et $[\gamma]$ constitue un groupement **dimensionnellement dépendant**.

Dans la suite, pour alléger les écritures, nous noterons :

$$[F] = M.\gamma = M.L.T^{-2}$$

au lieu de :

$$[F] = [M].[\gamma] = M.L.T^{-2}$$

De même, le travail $[W]$, la force et la longueur constituent un groupement dimensionnellement dépendant puisque nous pouvons écrire :

$$[W] = F.L$$
(8.5)



Est-ce que la masse volumique $[\rho]$, la vitesse $[U]$ et un diamètre $[D]$ constituent un groupement dimensionnellement dépendant ?

Il est difficile de démontrer qu'un groupement est dimensionnellement **indépendant**. Pour ce faire, il faut passer par la construction de la matrice aux dimensions fondamentales qui récapitule la puissance des unités fondamentales utilisées pour exprimer l'unité en question.

Par exemple, pour le groupement $[\rho]$, $[U]$ et $[D]$, la matrice aux dimensions s'écrit de la façon suivante :

$$\text{Mat.} = \begin{matrix} & \begin{matrix} [M] & [L] & [T] \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} [\rho] \\ [U] \\ [D] \end{matrix} \end{matrix} \quad (8.6)$$

en effet, $[\rho] = M^1 \cdot L^{-3} T^0$.

$[A]$, $[B]$ et $[C]$ sont des grandeurs dimensionnellement indépendantes si et seulement si le déterminant de la matrice aux dimensions $\neq 0$

Pour l'exemple du groupement $[\rho]$, $[U]$ et $[D]$:

$$\begin{aligned} \Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 0 \times \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \times \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times [1 \times 0 - 1 \times (-1)] \neq 0 \end{aligned}$$



Remarques :

- ce théorème implique que la matrice aux dimensions à considérer sera toujours carrée
- $\det \text{Mat.} = \det ({}^t \text{Mat.})$ ce qui signifie qu'il est possible d'écrire la matrice aux dimensions en colonne ou en ligne

Pour revenir à l'analogie avec l'algèbre linéaire, un groupement de grandeurs dimensionnellement indépendantes constituent une **nouvelle base** de l'espace vectoriel.

8.3 Nombre de grandeurs dimensionnellement indépendantes

Dans toute relation physique mettant en jeu des **grandeurs** mesurées à l'aide d'un système homogène d'unités comptant k **unités fondamentales**, on ne peut trouver plus de k **grandeurs dimensionnellement indépendantes**.

Pour revenir à l'analogie avec l'algèbre linéaire, il est clair que si la base principale est composée de k vecteurs, on ne peut extraire une base composée **au plus** de k vecteurs.

En poussant plus loin l'analogie, considérons un repère cartésien tri-dimensionnel. Sa base principale est constituée de 3 vecteurs. Pour exprimer n'importe quel vecteur de l'espace, nous pourrions constituer une autre base qui sera composée de maximum 3 vecteurs (indépendants). Par contre, si tous les vecteurs que nous devons exprimer sont dans un plan, alors la nouvelle base peut être constituée uniquement de 2 vecteurs indépendants. De même si, tous les vecteurs sont colinéaires, la nouvelle base pourra être constituée d'un seul vecteur.

En mécanique des fluides incompressibles, notre problème s'exprimera presque toujours à l'aide de 3 unités fondamentales ($[M].[L].[T]$).

8.4 Théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème des Π)

8.4.1 Théorème

Toute dépendance fonctionnelle entre g grandeurs exprimées dans un système à k unités fondamentales peut être remplacée par une relation entre $(g - k)$ produits sans dimension (notés Π).

Prenons un exemple pour illustrer ce théorème : la perte de charge linéique. Avant de connaître l'équation de Darcy-Weisbach (cf. Éq. (6.11) p. 68), les scientifiques avaient remarqué que le coefficient de perte de charge linéique λ variait avec :

- la vitesse d'écoulement U
- le diamètre D
- la rugosité de la conduite ε
- le fluide considéré de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ

Il était alors envisageable de lancer une étude paramétrique avec 6 grandeurs de manière à déterminer la fonction f (ou dépendance fonctionnelle) telle que :

$$\lambda = f \{U, D, \varepsilon, \rho, \mu\} \quad (8.7)$$

En utilisant le théorème de Vaschy-Buckingham cité plus haut, nous avons :

- $g = 6$ (5 grandeurs et λ)
- $k = 3$ (chaque grandeur citée peut s'exprimer comme une combinaison des 3 unités fondamentales mécaniques ($[M].[L].[T]$)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [U] = L.T^{-1} \\ [D] = L \\ [\mu] = M.L^{-1}.T^{-1} \\ [\rho] = M.L^{-3} \\ [\varepsilon] = L \\ [\lambda] = / \end{array} \right. \quad (8.8)$$

Donc d'après le théorème, l'Éq. 8.7 peut se ramener à une nouvelle dépendance fonctionnelle f' :

$$\Pi_1 = f' \{ \Pi_2, \Pi_3 \} \quad (8.9)$$

les Π_i étant des produits sans dimension qui associent chacune des grandeurs précédentes. Ceci accourcit significativement l'étude paramétrique à mener.



L'ordre des Π_i n'a pas d'importance ; Vaschy-Buckingham réduit juste le nombre de paramètres. Nous aurions donc pu écrire également que l'Éq. 8.7 pouvait se ramener aux nouvelles dépendances fonctionnelles suivantes :

$$\Pi_2 = f'' \{ \Pi_3, \Pi_1 \} \quad \text{ou encore} \quad f''' \{ \Pi_2, \Pi_3, \Pi_1 \} = 0$$

8.4.2 Détermination des produits adimensionnels Π

En repartant de l'exemple précédent, nous devons déterminer 3 produits adimensionnels Π . Pour cela, nous devons extraire une base de la liste des grandeurs proposées et exprimer les grandeurs restantes en fonction de cette base.

Extraire une base signifie qu'il nous faut trouver au plus k grandeurs dimensionnellement indépendantes.

Dans notre exemple, $k = 3$. Nous devons donc trouver 3 grandeurs dimensionnellement indépendantes. Nous avons démontré plus haut (cf. § 8.2, p. 86) que le groupement (ρ, U, D) , présent dans notre liste de grandeur, répondait à ces critères. Nous pouvons donc le choisir comme nouvelle base.



D'autres choix de base étaient possibles. Tous ces autres choix étaient corrects et auraient mené à des résultats justes à partir du moment où :

- les grandeurs du groupement appartiennent aux paramètres du problèmes
- les grandeurs du groupement sont au nombre de k
- les grandeurs constituent un groupement dimensionnellement indépendant

Par exemple, les groupements (ρ, U, ε) ou (μ, U, D) auraient pu également être choisis.



Suivant la base (ou groupement dimensionnellement indépendant) choisie, le nombre de produits Π sera le même, mais les Π n'auront pas la même expression analytique. Tous ces produits Π seront corrects. Par contre, il ne faudra considérer que ceux qui ont la même base de référence. Il ne sera pas judicieux, par exemple, d'utiliser des Π issus de la base (ρ, U, D) et ceux issus de la base (μ, U, D) dans le même problème.

Il nous reste par conséquent plus que les grandeurs μ , λ et ε à exprimer en fonction de cette nouvelle base. Chacune d'elle devra nous permettre de formuler un produit sans dimension Π .

Il est aisé de constater que ε et D sont homogènes à L . Par conséquent, il est possible d'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} [D] = L \\ [\varepsilon] = L \end{array} \right| \Rightarrow [\varepsilon] = \rho^0 U^0 D^1 = D \Rightarrow \boxed{\Pi_1 = \frac{\varepsilon}{D}} \quad (8.10)$$

L'important étant que Π soit sans dimension, on aurait également pu définir Π_1 par :

$$\Pi_1' = \frac{D}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \Pi_1'' = \frac{\sqrt{2} D}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \Pi_1''' = \frac{\varepsilon^{215}}{D^{215}} \quad (8.11)$$

De même, λ étant déjà sans dimension, on peut écrire :

$$\boxed{\Pi_2 = \lambda} \quad (8.12)$$

Il nous reste donc à déterminer Π_3 associé à μ et à la base (ρ, U, D) . Nous cherchons donc $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tels que :

$$[\mu] = \rho^a \cdot U^b \cdot D^c \quad (8.13)$$

Imaginons que nous soyons bloqués et que nous ne parvenions pas à trouver les coefficients a , b et c . Nous avons besoin d'une méthode systématique pour arriver au résultat. La méthode suivante, dite de Maxwell, permet de traduire l'égalité (8.13) en système de k équations à k inconnues ($k = 3$ ici) aisément solvable. Il est clair que cette méthode deviendra d'autant plus utile que k sera grand.

Si nous n'arrivons pas à déterminer ces coefficients rapidement, nous pouvons utiliser la **méthode systématique de Maxwell**. Cette méthode consiste dans un premier temps à récapituler les données de l'Éq. 8.13 dans un tableau de la forme :

grandeur	[M]	[L]	[T]	...	exposants
base	1	-3	0	...	a
⋮					
dépendante	1	1	-2	...	1

TABLEAU 8.1 – Forme du tableau employé dans la méthode de Maxwell

Ce qui nous donne pour notre exemple en se souvenant que $[\rho] = M^1.L^{-3}.T^0$, $[U] = M^0.L^1.T^{-1}$, $[D] = M^0.L^1.T^0$ et $[\mu] = M^1.L^{-1}.T^{-1}$:

grandeur	[M]	[L]	[T]	exp.
ρ	1	-3	0	a
U	0	1	-1	b
D	0	1	0	c
μ	1	-1	-1	1

TABLEAU 8.2 – Tableau employé dans la méthode de Maxwell appliqué à l'Éq. 8.13

Pour assurer l'homogénéité, il suffit de faire le bilan sur chacune des colonnes :

$$\begin{cases} \text{sur } M : & 1 \times a + 0 \times b + 0 \times c = 1 \times 1 \\ \text{sur } L : & -3 \times a + 1 \times b + 1 \times c = -1 \times 1 \\ \text{sur } T : & 0 \times a + -1 \times b + 0 \times c = -1 \times 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow [\mu] = \rho U D \quad (8.14)$$

Finalement :

$$\Pi_3 = \frac{\rho U D}{\mu} = \text{Re} \quad (8.15)$$

Pour conclure sur l'exemple, l'Éq. 8.9 devient :

$$\lambda = f' \left\{ \frac{\varepsilon}{D}, \text{Re} \right\} \quad (8.16)$$

L'étude paramétrique menée pour déterminer la fonction f' qui reste inconnue a permis d'obtenir le Diagramme de Moody (cf. § 6.7, p. 69).



Dans le tableau 8.2, le 1 à la ligne μ colonne [M] signifie que la masse est à la puissance 1 dans la dimension de μ ($[\mu] = M^1.L^{-1}.T^{-1}$). Ce 1 n'est en aucun cas la somme des trois chiffres du dessus dans le tableau...

8.5 Bilan de l'analyse dimensionnelle

Pour récapituler, énumérons les étapes de l'analyse dimensionnelle que nous avons réalisé :

1. lister les g paramètres du problème
2. exprimer les dimensions de chaque paramètre en fonction des dimensions fondamentales
3. compter k le nombre de dimensions fondamentales utilisées
4. déterminer k grandeurs parmi les g qui sont dimensionnellement indépendantes
5. former les produits adimensionnels (Π) associées aux $(g - k)$ grandeurs restantes

8.6 Similitudes

8.6.1 Définition

En plus de pouvoir faciliter les études paramétriques, ces produits adimensionnels vont nous permettre de réaliser des **similitudes**. On pourra par exemple extrapoler des résultats obtenus sur une maquette d'avion située dans une soufflerie à un avion réel en plein vol, ou encore des résultats issus d'essais réalisés sur un fluide peu onéreux/dangereux à des essais qui auraient été réalisés avec un fluide onéreux/dangereux.

Dans le cas d'une **similitude totale**, tous les produits adimensionnels sont égaux pour le modèle (réduit) et pour le prototype.

8.6.2 Application

Considérons la problématique suivante : une sonde de 3 m de diamètre évolue dans l'air et nous devons déterminer la force de traînée F_D pour un écoulement à $0,7 \text{ m.s}^{-1}$. Cependant, nous ne disposons que d'une veine d'essai en eau qui nous contraint à étudier une sphère de 10 cm de diamètre. Nous avons à notre disposition une balance hydrodynamique qui nous permet de mesurer la force de traînée dans notre veine d'essai. Quelle doit être la vitesse d'écoulement dans la veine d'essai ?

On peut récapituler les données dans le tableau suivant :

paramètre	prototype	modèle
géométrie	sphère	sphère
D	3 m	0,10 m
U	0,7 m.s ⁻¹	?
ρ	1,2 kg.m ⁻³	1000 kg.m ⁻³
ν	$1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$1,307 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

TABLEAU 8.3 – Récapitulatif des données du problème

L'analyse dimensionnelle nous donne le résultat suivant :

$$C_D = f \{ \text{Re} \} \quad \text{ou} \quad \frac{F_D}{0,5 \rho U^2 D^2} = f \left\{ \frac{U D}{\nu} \right\} \quad (8.17)$$

Nous pouvons dans un premier temps calculer le nombre de Reynolds pour le prototype et nous obtenons :

$$\text{Re}_p = 140000 \quad (8.18)$$

D'après la théorie des similitudes :

$$\text{Re}_p = \text{Re}_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_m = 1,83 \text{ m.s}^{-1}} \quad (8.19)$$

Nous lançons l'expérience et mesurons une force de traînée de 214 N sur notre modèle réduit. Quelle sera la valeur de la force de traînée sur notre prototype ?

Nous procédons de même pour le coefficient de traînée :

$$C_p = C_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{D,p} = 33,82 \text{ N}} \quad (8.20)$$

8.7 Limitations

8.7.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

Parfois, nous ne pourrons pas appliquer la théorie des similitudes. Pour comprendre ceci, commençons par adimensionner l'équation de Navier-Stokes qui pour rappel est donnée par l'Éq. (6.2) p. 63 :

$$\left(\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{U} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{U}$$

Ce qui donne en coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w \end{array} \right. \quad (8.21)$$

Afin de pouvoir adimensionner ces équations, il est nécessaire de rappeler la définition de la célérité du son c :

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \frac{c_p}{c_v} \frac{p}{\rho} \quad (8.22)$$

Définissons les grandeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x_i^* &= \frac{x_i}{L_{\text{ref.}}} \quad \text{et} \quad u_i^* = \frac{u_i}{U_{\text{ref.}}} \\ t^* &= t f \\ p^* &= \frac{p \gamma}{\rho_{\text{ref.}} c^2} \\ \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_{\text{ref.}}} \quad \text{et} \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_{\text{ref.}}} \\ g_i^* &= \frac{g_i L_{\text{ref.}}}{U_{\text{ref.}}^2} \end{aligned} \right\}$$

Ces équations se réécrivent alors sous la forme (pour la première ligne) :

$$\frac{f L_{\text{ref.}}}{U_{\text{ref.}}} \rho^* \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \rho^* w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{g_{\text{ref.}} L_{\text{ref.}}}{U_{\text{ref.}}^2} g_x^* - \frac{1}{\gamma} \frac{c^2}{U_{\text{ref.}}^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu_{\text{ref.}}}{\rho_{\text{ref.}} U_{\text{ref.}} L_{\text{ref.}}} \mu^* \Delta u^* \quad (8.23)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\text{Sr} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \text{Fr}^{-1} \frac{g_x^*}{\rho^*} - \frac{1}{\gamma \rho^*} \text{Ma}^{-2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \text{Re}^{-1} \frac{\mu^*}{\rho^*} \Delta u^*} \quad (8.24)$$

Remarques :

- les paramètres γ et μ sont liés à la nature du fluide étudié
- le nombre de Froude représente le rapport des forces d'inertie de convection aux forces volumiques de gravité
- le nombre de Strouhal représente le rapport des effets instationnaires aux effets d'inertie de convection
- le nombre de Mach représente le rapport des forces d'inertie de convection et des efforts volumiques de pression
- le nombre de Reynolds représente le rapport des forces d'inertie et des forces de viscosité

L'équation de Navier-Stokes prend ainsi un sens physique. Le terme $(\mu^* \rho^{*-1} \Delta u^*)$ qui est le terme visqueux sera négligeable lorsque le nombre de Reynolds sera grand.

8.7.2 Similitudes partielles

Pour un écoulement quelconque, l'équation ci-dessus fait apparaître le nombre de Froude et le nombre de Reynolds, qui s'écrivent :

$$\text{Fr} = \frac{U_{\text{ref.}}^2}{g L_{\text{ref.}}} \quad \text{et} \quad \text{Re} = \frac{U_{\text{ref.}} L_{\text{ref.}}}{\nu} \quad (8.25)$$

On remarque alors qu'il n'est pas possible de conserver ces deux nombres avec un rapport d'échelle. En effet, si l'échelle du prototype est 2 fois supérieure à celle du modèle réduit, le nombre de Reynolds impose une vitesse 2 fois inférieure, alors que le nombre de Froude, une vitesse 4 fois supérieure ce qui est impossible.

Il ne sera donc pas possible d'effectuer une similitude totale de Reynolds et de Froude, nous passerons alors par des similitudes partielles. Suivant le cas, nous devrons faire des concessions sur tel ou tel nombre adimensionnel (c'est-à-dire que nous nous permettrons de ne pas le conserver entre le modèle réduit et le prototype).

Écoulements en charge : peu d'influence du nombre de Froude ni du nombre de Mach
→ similitude de Reynolds

Écoulements à surface libre : influence faible du Reynolds à partir d'une certaine valeur
→ similitude de Froude

Écoulements compressibles : peu d'influence du nombre de Froude (pas d'effet de pesanteur), effets de compressibilité à grande vitesse
→ similitude de Reynolds pour les faibles vitesses
→ similitude de Mach pour les grandes vitesses