



<http://matwo.fr/ensam>

INGÉNIEUR ARTS ET MÉTIERS
SPÉCIALITÉ ENVIRONNEMENT ET GESTION DES RISQUES
Mécanique des Fluides
version du 3 mars 2023

Thibaud MARCEL-MATHEY
Thibaud.MARCEL-MATHEY@ensam.eu

1	Notations	7
2	Statique des fluides	13
	Introduction	13
2.1	Masse volumique	14
2.2	Densité	14
2.3	Force, masse, poids	14
2.4	Notion de pression	15
2.5	Principe de Pascal	16
2.6	Forces de pression sur une paroi	17
2.7	Théorème d'Archimède	19
3	Cinématique	21
3.1	Ligne de courant	21
3.2	Trajectoire	22
3.3	Point d'arrêt	23
3.4	Débit, vitesse	23
4	Dynamique des fluides en fluide parfait	25
4.1	Fluide parfait	25
4.2	Équation de continuité	26
4.3	Théorème de Bernoulli	27
4.3.1	Définition de la charge	27
4.3.2	Formulation du théorème	28

4.4	Formule de Torricelli	29
4.4.1	Perpendiculaire aux lignes de courant	29
4.4.2	Conservation du volume et vitesse nulle	29
4.4.3	Expression de la formule de Torricelli	29
4.4.4	Striction du jet	31
4.5	Tube de Pitot	32
4.5.1	Retour sur le point d'arrêt	32
4.5.2	Technologie du tube de Pitot	32
4.6	Tube de Venturi	34
5	Rhéologie	35
5.1	Généralités	36
5.2	Caractérisation des fluides newtoniens	36
6	Dynamique des fluides en fluide visqueux	39
6.1	Régimes d'écoulement	39
6.2	Nombre de Reynolds	40
6.3	Calcul des pertes de charges	41
6.3.1	Pertes de charges linéaires	42
6.3.2	Pertes de charges singulières	45
7	Machines fluides	47
7.1	Machines volumétriques	48
7.2	Turbomachines	48
7.3	Charge manométrique hauteur manométrique	49
7.4	Courbe caractéristique d'une pompe	50
7.5	Couplage de machines fluides	51
7.5.1	Couplage en série de deux pompes identiques	51
7.5.2	Couplage en parallèle de deux pompes identiques	52
8	Analyse dimensionnelle	53
8.1	Unités et système international	54
8.1.1	Unités du système international	54
8.1.2	Unités fondamentales du système international	54
8.2	Dépendance dimensionnelle	55

8.3	Nombre de grandeurs dimensionnellement indépendantes	57
8.4	Théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème des Π)	57
8.4.1	Théorème	57
8.4.2	Détermination des produits adimensionnels Π	58
8.5	Bilan de l'analyse dimensionnelle	60
8.6	Similitudes	60
8.6.1	Définition	60
8.6.2	Application	60



<http://matwo.fr/ensam>

Nombres adimensionnels

γ rapport des capacités calorifiques massiques à pression et à volume constants ($\gamma_{\text{air}} = 1,4$)

Eu nombre d'Euler = $\frac{p - p_{\text{ref.}}}{\rho U_{\text{ref.}}^2}$

Fr nombre de Froude = $\frac{U_{\text{ref.}}}{\sqrt{g L_{\text{ref.}}}}$ ou = $\frac{U_{\text{ref.}}^2}{g L_{\text{ref.}}}$

Ma nombre de Mach = $\frac{U_{\text{ref.}}}{c}$

Nu nombre de Nusselt = $\frac{h L_{\text{ref.}}}{\lambda_{\text{fluide}}}$

Pr nombre de Prandtl = $\frac{\mu c_p}{\lambda_{\text{fluide}}} = \frac{\nu}{a}$

Re nombre de Reynolds = $\frac{U_{\text{ref.}} L_{\text{ref.}}}{\nu}$

Sr nombre de Strouhal = $\frac{f L_{\text{ref.}}}{U_{\text{ref.}}} = \frac{\omega L_{\text{ref.}}}{2\pi U_{\text{ref.}}}$

We nombre de Weber = $\frac{\rho U_{\text{ref.}}^2 L_{\text{ref.}}}{Y}$

C_D coefficient de traînée (*drag*) = $\frac{2 F_D}{\rho d_{\text{ref.}} U_{\text{ref.}}^2 l}$

C_L coefficient de portance (*lift*) = $\frac{2 F_L}{\rho d_{\text{ref.}} U_{\text{ref.}}^2 l}$

C_p coefficient de pression = $2 \frac{p - p_{\text{ref.}}}{\rho U_{\text{ref.}}^2} = 2 \text{ Eu}$

Notations grecques

δ	épaisseur de la couche limite
λ_c	conductivité thermique
λ	coefficient de perte de charge linéique (régulière)
μ	viscosité dynamique du fluide
ν	viscosité cinématique du fluide ($\mu = \rho \nu$)
Ω_i	$i^{\text{ème}}$ composante de la vortacité $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U}$
Π	poussée d'Archimède ou groupements adimensionnels
χ	coefficient de compressibilité
ρ	masse volumique du fluide
$\bar{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses
ξ, ζ	coefficient de perte de charge ponctuelle (ou singulière)

Notations latines

a	diffusivité thermique = $\frac{\lambda_c}{\rho c_p}$
c	vitesse du son (dans un gaz parfait = $\sqrt{\gamma r T}$)
d	densité d'un fluide = $\frac{\rho}{\rho_{\text{ref.}}}$
D_h	diamètre hydraulique
g	accélération de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$)
R	constante universelle des gaz parfaits ($R = 8,314472 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
r, r^s	constante spécifique du gaz ($r_{\text{air}} = 287,058 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
$c_p (c_v)$	capacité calorifique massique à pression constante (resp. massique à volume constant)
E	charge (en Pa)
h	coefficient d'échange convectif (ou de convection)
H	hauteur (si associée à une pression, en mCE ou mHg)
$L_{\text{ref.}}$	longueur de référence (D_h en hydraulique)
$p_{\text{atm.}}$	pression atmosphérique ($p_{\text{atm.}} = 101325 \text{ Pa}$ au niveau de la mer)
$p_{\text{v,sat.}}$	pression de vapeur saturante
$q_m (q_v)$	débit massique (resp. volumique)
Q	critère « Q » = $\frac{1}{2} [\ R\ ^2 - \ S\ ^2]$
R_{ij}	tenseur antisymétrique du taux de déformation ou de rotation = $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right]$
S_{ij}	tenseur symétrique du taux de déformation = $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right]$
S, dS	surface, élément de surface considéré
\vec{U}	vecteur vitesse ($u_i, i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse \vec{U})
$U_{\text{ref.}}$	vitesse de référence
V, dV	volume, élément de volume considéré
Y	tension superficielle

Alphabet grec

alpha	A	α
bêta	B	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	E	ε
zêta	Z	ζ
êta	H	η
thêta	Θ	θ
iota	I	ι
kappa	K	κ
lambda	Λ	λ
mu	M	μ
nu	N	ν
xi	Ξ	ξ
omicron	O	\omicron
pi	Π	π
rho	P	ρ
sigma	Σ	σ
tau	T	τ
upsilon	Y	υ
phi	Φ	ϕ
chi	X	χ
psi	Ψ	ψ
oméga	Ω	ω

Alphabet phonétique de l'OTAN (ou alphabet radio)

A	alpha
B	bravo
C	charlie
D	delta
E	echo
F	foxtrot
G	golf
H	hotel
I	india
J	juliett
K	kilo
L	lima
M	mike
N	november
O	oscar
P	papa
Q	quebec
R	romeo
S	sierra
T	tango
U	uniform
V	victor
W	whiskey
X	x-ray
Y	yankee
Z	zulu



<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

Introduction	13
2.1 Masse volumique	14
2.2 Densité	14
2.3 Force, masse, poids	14
2.4 Notion de pression	15
2.5 Principe de Pascal	16
2.6 Forces de pression sur une paroi	17
2.7 Théorème d'Archimède	19

Introduction

- étude des fluides au repos
- qu'est-ce qu'un fluide? Le sable est-il un fluide?

Problématique : comment définir la pression en tout point d'un fluide au repos?



2.1 Masse volumique

Pour un fluide donné, la masse volumique ρ en $[\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}]$ est le rapport de la masse m en $[\text{kg}]$ du fluide et du volume V en $[\text{m}^3]$ occupé par cette masse.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.1)$$

Remarques :

- $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$
- $\rho_{\text{eau}, 277 \text{ K}} \approx 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- $0 \text{ K} \approx 273^\circ\text{C}$
- $\rho_{\text{air}, 293 \text{ K}, 1 \text{ atm.}} \approx 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

2.2 Densité

La densité est le rapport entre la masse volumique du fluide et une masse volumique de référence (eau pour les liquides, air pour les gazs).

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{ref.}}} \quad (2.2)$$



Quelle est la densité du mercure sachant que sa masse volumique vaut $13\,545 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$?



En anglais, on parle souvent de density pour parler de masse volumique...

2.3 Force, masse, poids

Une force \vec{F} est une entité vectorielle (point d'application, norme, sens et direction). La norme d'une force est appelée **intensité** et se mesure en $[\text{N}]$ (Newton¹).

La masse m en $[\text{kg}]$ est une propriété intrinsèque du matériau et est une entité scalaire, alors que le poids \vec{P} est la force de pesanteur exercée par un astre sur la masse m . Pour la planète Terre, l'accélération de la pesanteur est notée g .

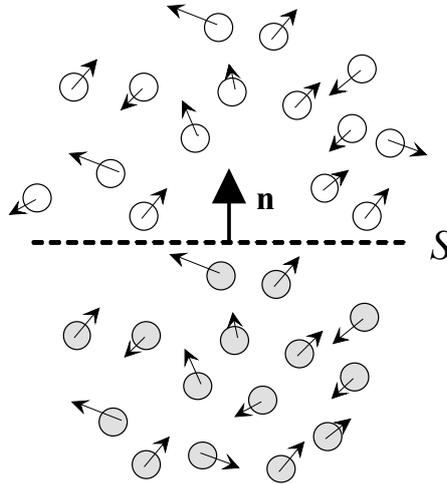
$$\vec{P} = m \vec{g} \quad (2.3)$$

1.  EN Isaac NEWTON, 1643-1727

2.4 Notion de pression

Considérons un fluide enfermé dans une enceinte (poids du fluide négligé) limitée par une enveloppe de surface S

- forces désordonnées exercées par des molécules \vec{f}_i
- force résultante : $\vec{dF} = \sum \vec{f}_i$
- fluide au repos, dS immobile $\rightarrow d\vec{F}$ normale à la section dS



La pression en [Pa] (Pascal²) est le rapport des forces des particules fluides qui agissent sur une surface, et de cette surface, lorsque la surface tend vers zéro :

$$p = \left[\frac{dF}{dS} \right]_{dS \rightarrow 0} \quad (2.4)$$

La pression est donc une grandeur **scalaire**, indépendante de l'orientation de la surface.



Principe des raquettes de marche...

Équation aux dimensions :

$$[p] = [\text{Pa}] = [\text{N}] \cdot L^{-2} = M \cdot L \cdot T^{-2} \times L^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \quad (2.5)$$

cf. cours sur l'Analyse Dimensionnelle (cf. § 8, p. 53)

- unité du système international : le pascal Pa
- le bar : 1 bar = 10⁵ Pa
- l'atmosphère : 1 atm = 101 325 Pa
- le mètre de colonne d'eau (pour de l'eau à 4°C sous 1 atm) : 1 mCE = 9807 Pa

2.5 Principe de Pascal

En tout point i d'un fluide au repos, la pression statique ($p + \rho g z$) reste constante.

$$\boxed{p_i + \rho g z_i = \text{cte}} \quad (2.6)$$

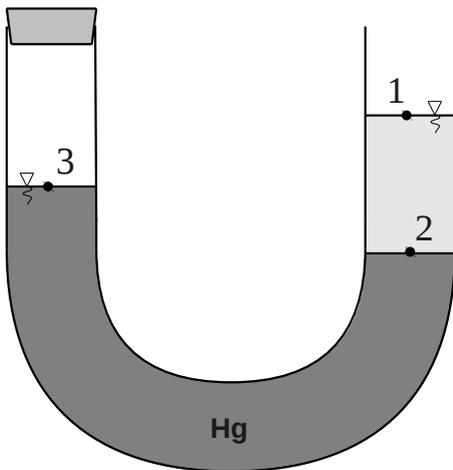
avec z_i la hauteur du point i considéré

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 \quad (2.7)$$



Attention, axe des \vec{z} orienté vers le haut!

Exemple d'application : le tube en « U »



Soient deux liquides non miscibles (mercure et essence) dans un tube en « U ». À l'équilibre, la branche fermée (au dessus du point 3) contient un gaz à une pression p_3 que nous allons chercher à déterminer.

Données : $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_e = 850 \text{ kg.m}^{-3}$,
 $p_{\text{atm}} = 101\,325 \text{ Pa}$
 $z_1 = 330 \text{ mm}$, $z_2 = 220 \text{ mm}$ et $z_3 = 250 \text{ mm}$.

1. Déterminer la pression qui règne à la surface de séparation (point 2)
2. Déterminer la pression qui règne dans la branche fermée (point 3)

Réponses : $p_2 = 102\,242 \text{ Pa}$ et $p_3 = 98\,239 \text{ Pa}$

Soit $p_{\text{rel.}}$ la pression relative et p la pression absolue :

$$p = p_{\text{rel.}} + p_{\text{atm.}} \quad (2.8)$$



Attention :

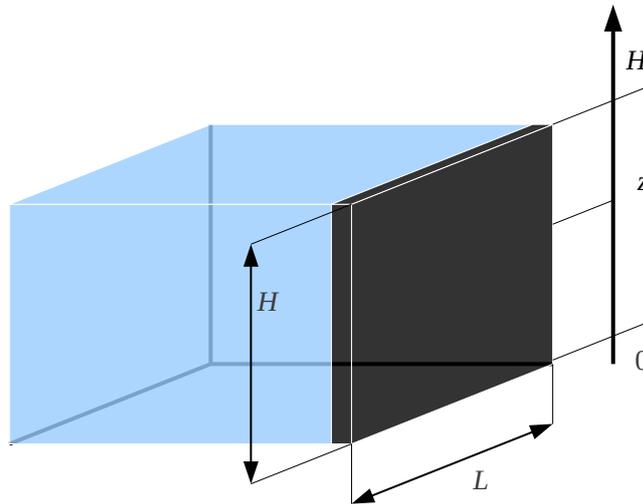
- si un manomètres mesure une pression de 0 à l'air libre, c'est qu'il mesure la pression relative
- il existe la notion de **pression totale** qui est différente de la notion de **pression absolue**

$$P = p^* = p + 1/2 \rho U^2$$

avec U la vitesse de l'écoulement

2.6 Forces de pression sur une paroi

Considérons la paroi de hauteur H , de largeur L et d'épaisseur e soumise à un volume d'eau.



- pression exercée par le fluide sur la paroi tout en haut du réservoir :

$$p_{(z=H)} = p_{\text{atm.}}$$

- pression exercée par le fluide sur la paroi tout en bas du réservoir :

$$p_{(z=0)} + \rho g \times 0 = p_{(z=H)} + \rho g H \Rightarrow p_{(z=0)} = p_{\text{atm.}} + \rho g H$$

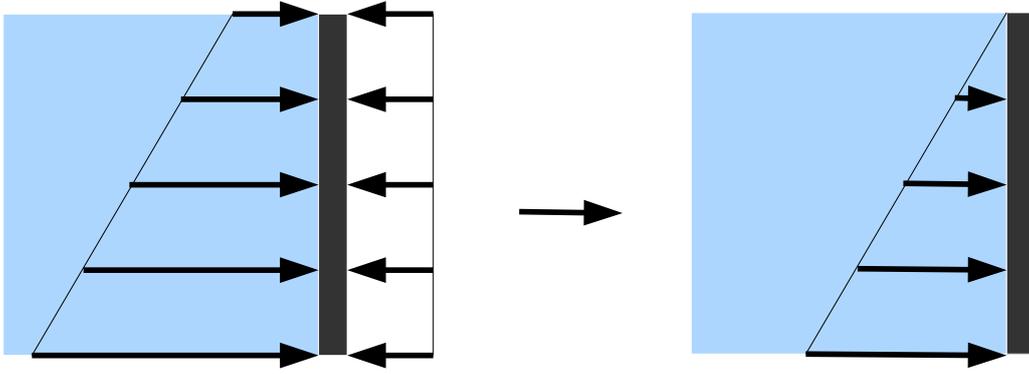
- pression exercée par le fluide sur la paroi à une hauteur z :

$$p(z) = p_{\text{atm.}} + \rho g z$$

- pression exercée par l'air atmosphérique sur la paroi :

$$p = p_{\text{atm.}}$$

La force est le produit de la pression et de la surface. Le volume du prisme nous donnera donc la norme de la résultante des forces de pression subies par la paroi.



$$F = \frac{1}{2} \times \rho g H \times H \times L \quad (2.9)$$

$$F = \frac{1}{2} \rho g H^2 L \quad (2.10)$$

De même, le point d'application de cette résultante se situera sur la projection du centre de gravité du prisme, à $1/3 H$ en partant de la base, et à $L/2$.



Pourquoi ?

2.7 Théorème d'Archimède

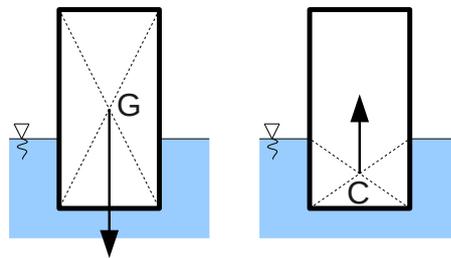
Nous allons chercher à résoudre le problème suivant :



Un plongeur ($S_{\text{peau}} \approx 180 \text{ dm}^2$) est équipé d'une bouteille de 12 L de masse 19 kg et d'une combinaison néoprène de 7 mm d'épaisseur. En considérant que le corps humain est à flottabilité neutre et que le poids apparent du plomb est identique à son poids absolu, déterminer le nombre de plombs d'1 kg à disposer sur sa ceinture de manière à ce qu'il soit équilibré (ou légèrement sur-lesté).

N.B. : $\rho_{\text{np}} = 190 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

Pour cela, nous devons introduire la notion de **poussée d'Archimède**³.



Lorsqu'un solide est immergé (en totalité ou partiellement) dans un fluide, en plus de son centre de gravité G , un nouveau point caractéristique apparaît ; il s'agit du **centre de carène** C . G est le point d'application des forces de pesanteurs, alors que C , celui des forces fluides s'exerçant sur le solide immergé.

Archimède a établi son **traité des corps flottants** lors de son expertise portant sur la couronne du roi Hérion II :

« Tout corps plongé dans un fluide au repos, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut, et opposée au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée poussée d'Archimède.

C'est sur le centre de carène que s'applique la poussée d'Archimède.

Pour un solide (\cdot_s) immergé dans un fluide (\cdot_f), deux forces s'opposent :

— le poids du solide

$$P = m g = V_s \rho_s g$$

— la poussée d'ARCHIMÈDE

$$\Pi = V_s \rho_f g$$

avec

	V_s	le volume du solide
	ρ_s	la masse volumique du solide
	ρ_f	la masse volumique du fluide

$P = \Pi$ le solide est en équilibre dans l'eau

$P > \Pi$ le solide coule

$P < \Pi$ le solide flotte

3. GR Archimède, 287 av.J.-C.-212 av.J.-C.

Retour à l'exemple.

Appliquons le Principe Fondamental de la Statique (PFS) sur le système {plongeur}

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$
$$\vec{P}_{\text{plongeur}} + \vec{\Pi}_{\text{plongeur}} = \vec{0}$$

En projetant sur \vec{z} , axe vertical orienté vers le haut

$$-P_{\text{plongeur}} + \Pi_{\text{plongeur}} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\text{plongeur}} = \Pi_{\text{plongeur}}$$

Soit n le nombre de plomb d'1 kg :

— poids du plongeur :

$$P_{\text{plongeur}} = P_{\text{humain}} + \underbrace{P_{\text{bouteille}}}_{=m g} + \underbrace{P_{\text{combinaison}}}_{=V_{\text{np}} \rho_{\text{np}} g} + \underbrace{P_{\text{plomb}}}_{=n \times 1 \times g}$$

— poussée d'Archimède du plongeur :

$$\Pi_{\text{plongeur}} = \Pi_{\text{humain}} + \underbrace{\Pi_{\text{bouteille}}}_{=V \rho_{\text{eau}} g} + \underbrace{\Pi_{\text{combinaison}}}_{=V_{\text{np}} \rho_{\text{eau}} g} + \Pi_{\text{plomb}}$$



<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

3.1	Ligne de courant	21
3.2	Trajectoire	22
3.3	Point d'arrêt	23
3.4	Débit, vitesse	23

- notions liées au champ de vitesse d'un fluide **newtonien** (cf. § 5, p. 35) en **mouvement**
- domaine de l'espace Ω , écoulement caractérisé par un champ de vitesse $\vec{U}(M,t)$

3.1 Ligne de courant

Ligne de courant (*streamline*) : une ligne de courant à l'instant t_0 est une courbe dont la tangente en chacun de ses points est, à l'instant t_0 , colinéaire au vecteur vitesse local du champ de l'écoulement

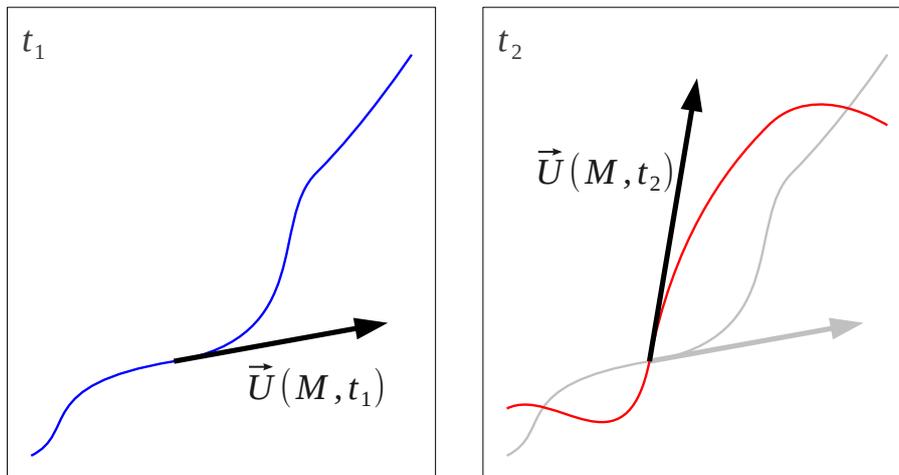


FIGURE 3.1 – Allure de la courbe représentative au cours du temps, régime permanent

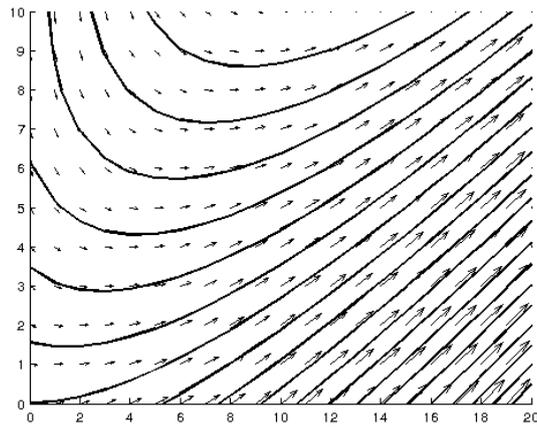


FIGURE 3.2 – Champ de vecteurs vitesse et lignes de courant

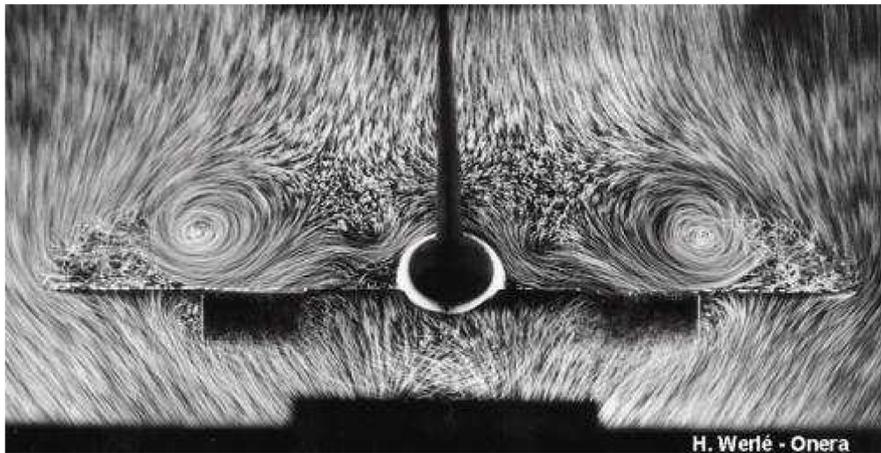
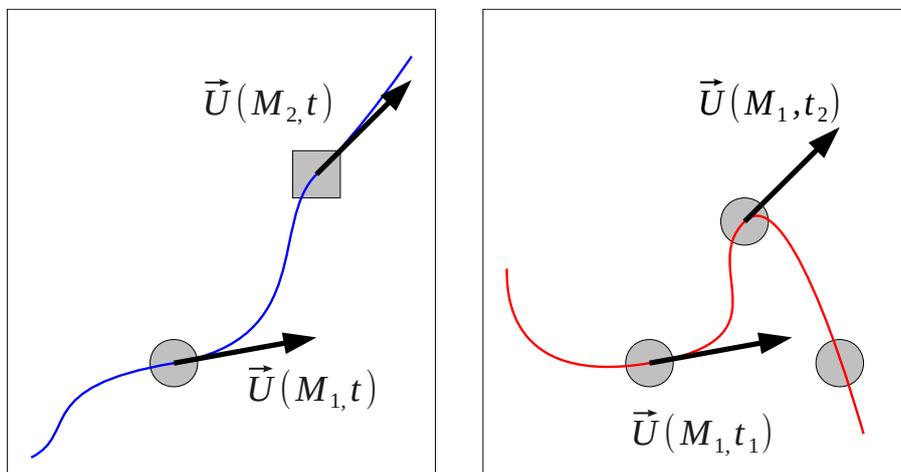


FIGURE 3.3 – Visualisation des lignes de courant de l'écoulement transverse autour du Concorde (image ONERA, Office national d'études et de recherches aérospatiales)

3.2 Trajectoire

Trajectoire (*particle path*) : courbe décrite au cours du temps par une particule fluide quelconque



Écoulement permanent : les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

3.3 Point d'arrêt

Dans un écoulement autour d'un obstacle, il existe un point particulier où la ligne de courant s'arrête sur l'obstacle; il s'agit du **point d'arrêt** (cf. § 4.5.1, p. 32).

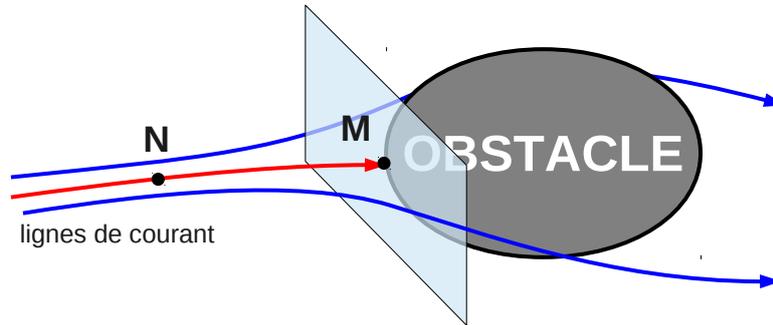


FIGURE 3.4 – Exemple de point d'arrêt sur l'écoulement autour d'un cylindre

3.4 Débit, vitesse

Le débit massique q_m représente la masse de fluide passant par un point ou une surface par unité de temps en $[\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]$. Le débit massique reste toujours constant, il se **conserve**.

$$q_m = \frac{m}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Le débit volumique q_v représente le volume de fluide par unité de temps en $[\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$. Le débit volumique se conserve pour les écoulements incompressibles, c'est-à-dire, lorsque la masse volumique du fluide varie peu et qu'elle ne dépend que de la température :

$$\rho = \rho(T) \quad \text{ou/et} \quad \text{Ma} < 0,3 \quad \text{ou/et} \quad \text{div } \vec{U} = 0$$

$$q_v = \frac{q_m}{\rho} \quad (3.2)$$

Dans une conduite de section S ($S = \pi R^2$ dans le cas d'une conduite cylindrique), la vitesse moyenne U en $[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$ est le rapport du débit volumique et de la section S ; il s'agit de la **vitesse débitante**.

$$U = \frac{q_v}{S} \quad (3.3)$$



<http://matwo.fr/ensam>

Dynamique des fluides en fluide parfait

Sommaire

4.1	Fluide parfait	25
4.2	Équation de continuité	26
4.3	Théorème de Bernoulli	27
4.3.1	Définition de la charge	27
4.3.2	Formulation du théorème	28
4.4	Formule de Torricelli	29
4.4.1	Perpendiculaire aux lignes de courant	29
4.4.2	Conservation du volume et vitesse nulle	29
4.4.3	Expression de la formule de Torricelli	29
4.4.4	Striction du jet	31
4.5	Tube de Pitot	32
4.5.1	Retour sur le point d'arrêt	32
4.5.2	Technologie du tube de Pitot	32
4.6	Tube de Venturi	34



4.1 Fluide parfait

- fluide non visqueux : viscosité dynamique nulle, $\mu = 0$ (cf. § 5, p. 35)
- fluide parfait \neq fluide incompressible : $\rho = f(T)$
- fluide parfait \neq gaz parfait

4.2 Équation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse pour un fluide.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0} \quad (4.1)$$



En coordonnées cartésiennes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, avec \vec{A} un vecteur, le divergent s'écrit :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \operatorname{div} \vec{A} = \frac{d a_x}{d x} + \frac{d a_y}{d y} + \frac{d a_z}{d z}$$



Que devient l'équation de continuité pour un écoulement incompressible stationnaire sachant que pour un écoulement incompressible, $\rho = \rho(T)$?

4.3 Théorème de Bernoulli

4.3.1 Définition de la charge

En un point i , l'énergie volumique totale d'un fluide se note E_i : c'est la **charge totale**. E_i est en $[\text{J.m}^{-3}]$ et donc en $[\text{Pa}]$.

Il y a trois formes d'énergie volumique :

- l'énergie volumique potentielle au point i : $\rho g z_i$
- l'énergie volumique cinétique au point i : $1/2 \rho U_i^2$
- l'énergie volumique élastique au point i : p_i

Chacune de ces énergies est en $[\text{J.m}^{-3}]$ et donc en $[\text{Pa}]$.

La charge E_i est l'énergie volumique totale, donc la somme de ces trois énergies :

$$E_i = p_i + 1/2 \rho U_i^2 + \rho g z_i \quad (4.2)$$

Vocabulaire :

- $E_i = p_i + 1/2 \rho U_i^2 + \rho g z_i$: **charge totale**
- $p_i + \rho g z_i$: **charge statique**
- $1/2 \rho U_i^2$: **charge dynamique**
- $P_i = p_i^* = p_i + 1/2 \rho U_i^2$: **pression totale**



Démontrer que : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ J.m}^{-3}$

Il est également possible d'exprimer la charge en terme de hauteur en multipliant par $1/(\rho g)$

$$\frac{E_i}{\rho g} = H_i = \frac{p_i}{\rho g} + z_i + \frac{U_i^2}{2g} \quad (4.3)$$

Vocabulaire :

- $p_i/(\rho g) + z_i$: hauteur piézométrique ou **statique**
- $U_i^2/(2g)$: hauteur cinétique ou **dynamique**

H_i est homogène à une longueur. Si le ρ utilisé est celui de l'eau, on ne parlera pas de mètres mais de mètres de colonne d'eau [mCE] (cf. § 2.4, p. 15). Il existe également le mètre de colonne d'huile [mCH] et le mètre de colonne de mercure [mHg].



Démontrer que : $1 \text{ Pa}/(\rho g) = 1 \text{ m}$

4.3.2 Formulation du théorème

Le long d'une ligne de courant, entre les points 1 (en entrée) et 2 (en sortie), le théorème de Bernoulli¹ s'écrit :

$$E_1 + \delta W = E_2 + \delta E_{1 \rightarrow 2} \quad (4.4)$$

δW est le travail volumique des **parois mobiles** comme la roue à aube d'une pompe, les pâles d'une éolienne, etc.

$\delta W \neq 0$ uniquement lorsque la ligne de courant considérée **traverse** une paroi mobile (cf. § 7, p. 47). Sinon, $\delta W = 0$.

$\delta E_{1 \rightarrow 2}$ est la **perte de charge** que subit le fluide entre 1 et 2, et donc la perte d'énergie volumique.

$\delta E_{1 \rightarrow 2} \neq 0$ uniquement avec un fluide réel ($\mu \neq 0$). Sinon, $\delta E_{1 \rightarrow 2} = 0$ (cf. § 5, p. 35).



Ce théorème n'est valable que le long d'une ligne de courant.

En fluide parfait : $\mu = 0 \Rightarrow \delta E_{1 \rightarrow 2} = 0$,

en l'absence de parois mobiles : $\delta W = 0$,

entre les points 1 et 2 situés sur la ligne de courant, le Théorème de Bernoulli s'écrit :

$$E_1 = E_2 \quad (4.5)$$

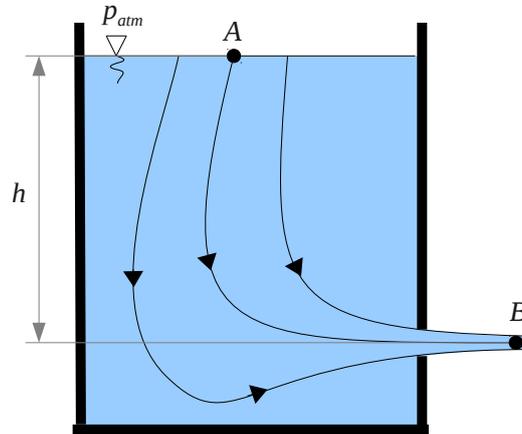
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2 + \rho g z_2$$

1.  CH Daniel BERNOULLI, 1700-1782

4.4 Formule de Torricelli

4.4.1 Perpendiculaire aux lignes de courant

En dehors d'une ligne de courant, il n'est pas possible d'appliquer le théorème de Bernoulli. Cependant, dans le cas particulier où nous sommes **perpendiculaires aux lignes de courant**, il est possible d'appliquer le Principe de Pascal (cf. § 2.5, p. 16).



C'est pourquoi, à la sortie d'un réservoir, la pression du fluide est la même que la pression à l'extérieur du réservoir.

$$p_B = p_{atm.} \quad (4.6)$$

4.4.2 Conservation du volume et vitesse nulle

En écoulement incompressible, ce qui le cas ici, le débit volumique se conserve. Or le débit volumique est le produit de la vitesse moyenne et de la section de passage. En A et en B nous avons donc :

$$U_A S_A = U_B S_B \quad \text{or} \quad S_A \gg S_B \quad \Rightarrow \quad U_A \ll U_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_A \approx 0} \quad (4.7)$$

4.4.3 Expression de la formule de Torricelli

En appliquant le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant reliant A à B , on obtient la **formule de Torricelli**²

$$\boxed{U_B = \sqrt{2 g h}} \quad (4.8)$$

2.  Evangelista TORRICELLI, 1608-1647

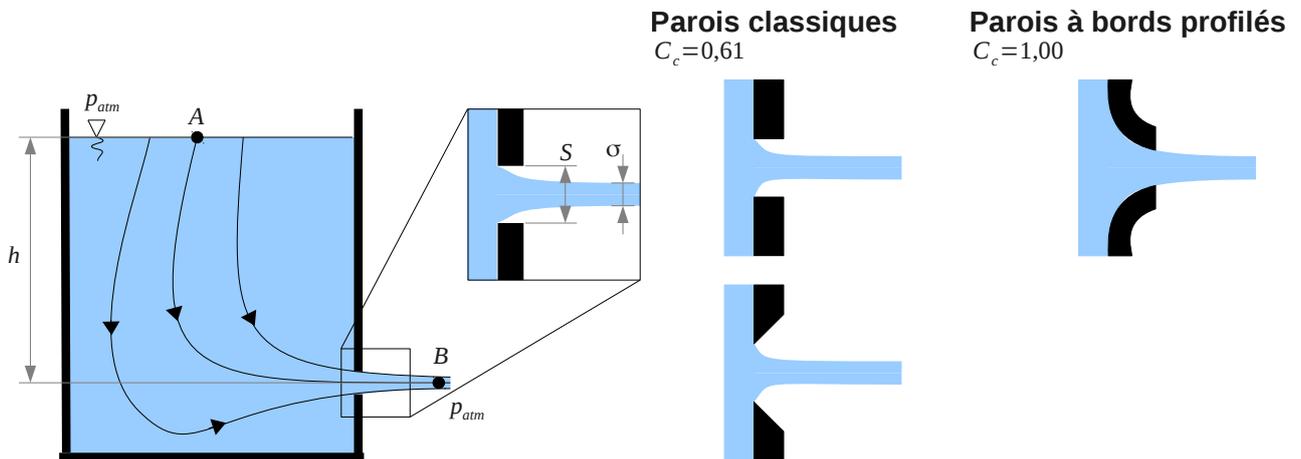


Démontrer la formule de Torricelli.

4.4.4 Striction du jet

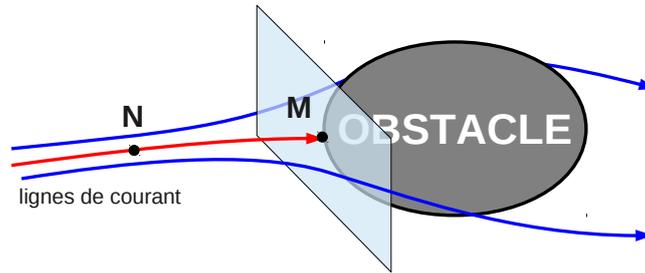
On peut remarquer que les sections $\sigma \neq S$ (la section du jet n'est pas celle de l'orifice). L'aspect « lisse » des lignes de courant peut effectivement réduire la section du jet. Cette striction du jet ne va en aucun cas modifier la valeur de la vitesse, mais plutôt celle du **débit** en sortie. On fait donc apparaître un coefficient de contraction C_c pour quantifier cette striction. Le débit volumique est donc donné par :

$$q_v = C_c S U_B \quad (4.9)$$



4.5 Tube de Pitot

4.5.1 Retour sur le point d'arrêt



Pour $\rho g z_M \approx \rho g z_N$, au point d'arrêt M :

$$p_M = p_N + \frac{1}{2} \rho U_N^2 \quad (4.10)$$

4.5.2 Technologie du tube de Pitot

Le tube de Pitot³ est un instrument de mesure de la vitesse d'air, largement utilisé dans l'industrie aéronautique et automobile.

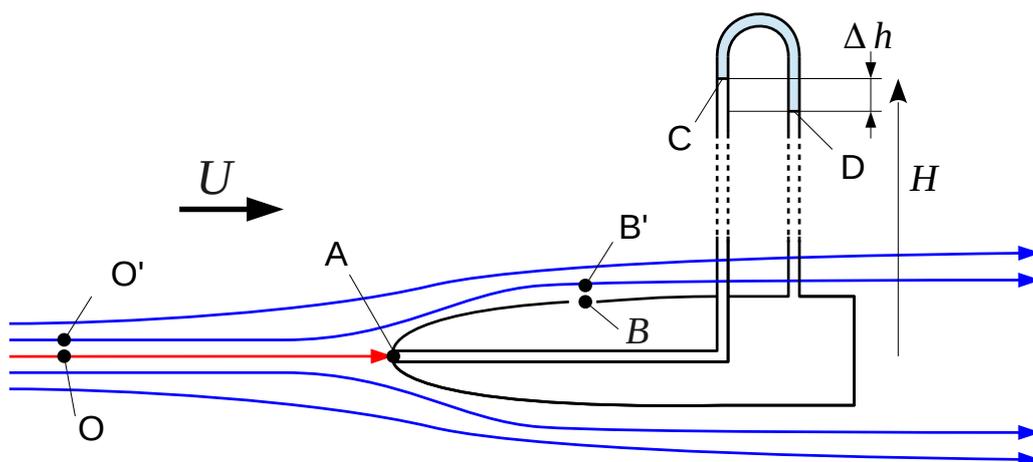


FIGURE 4.1 – Représentation schématique d'un tube de Pitot

La formule du tube de Pitot est la suivante :

$$U = \sqrt{2 g \Delta h} \quad (4.11)$$

3. FR Henri PITOT, 1695-1771



Même si les formulations se ressemblent, les formules de Toricelli et de Pitot ne concernent pas les mêmes phénomènes.



Démontrer la formule du tube de Pitot.

4.6 Tube de Venturi

Le tube de Venturi⁴ est un dispositif utilisé principalement pour mesurer des débits ou créer des aspirations et des mélanges.

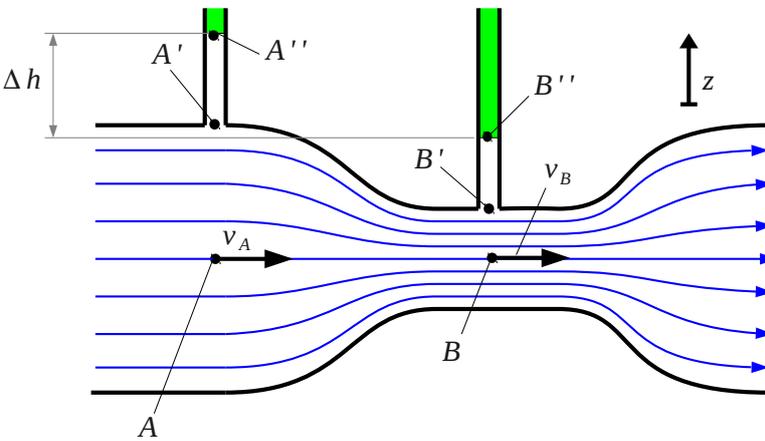
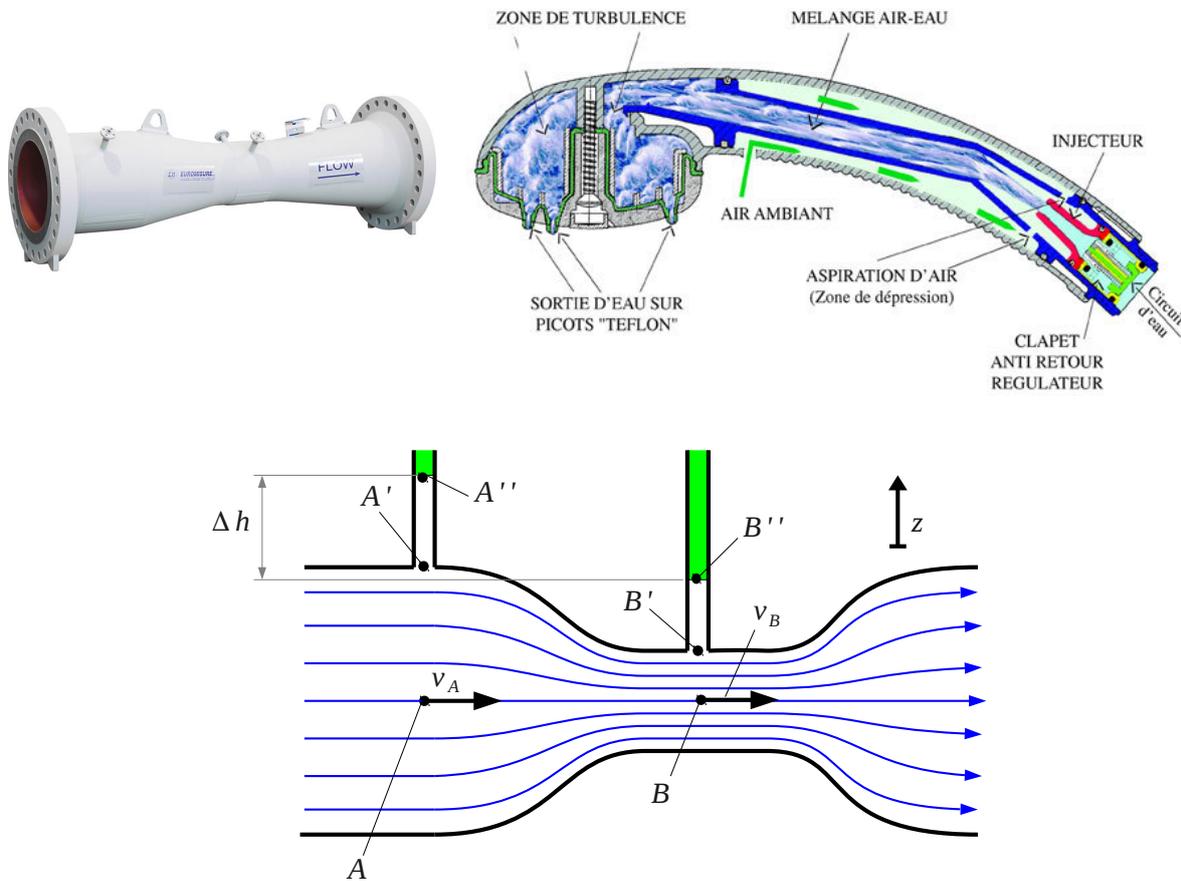


FIGURE 4.2 – Représentation schématique d'un venturi

$$q_v = \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{1/S_B^2 - 1/S_A^2}} \quad (4.12)$$

Quelques exemples d'applications du venturi :

- appareil de mesure du débit (disque ou élargissement/rétrécissement)
- pistolets à peinture
- carburateurs des moteurs à combustion interne
- cheminées (amélioration du tirage)
- pommeaux de douche à économie d'eau, etc.

4. IT Giovanni Battista VENTURI, 1746-1822



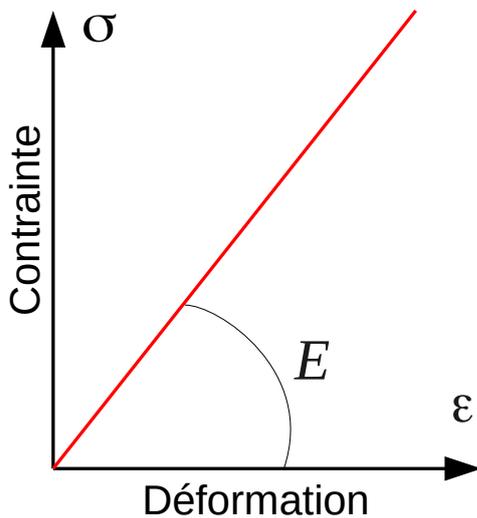
<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

5.1 Généralités	36
5.2 Caractérisation des fluides newtoniens	36

- terme inventé par Bingham¹ en 1929 (grec *rheo* et *logos*)
- étude des écoulements et des déformations
- solide élastique : contraintes proportionnelles aux déformations
- fluide newtonien : contraintes proportionnelles aux **vitesse de déformation**

SOLIDE ELASTIQUE



FLUIDE

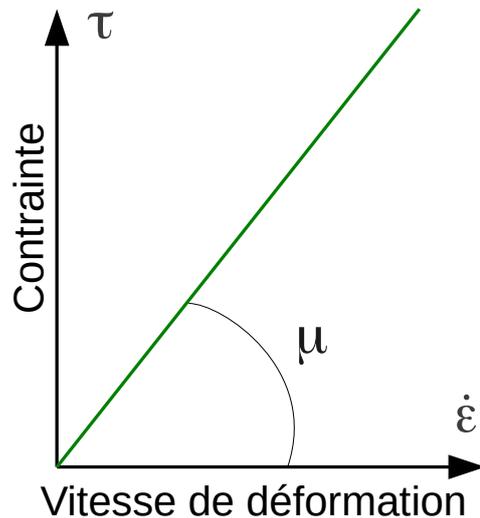


FIGURE 5.1 – Analogie entre le module d'Young E et la viscosité dynamique μ

1. US Eugene Cook BINGHAM, 1878-1945

5.1 Généralités

Alors que les fluides Newtoniens (fluides courants, cf. Fig. 5.2, (1)) subissent une contrainte qui varie proportionnellement à la vitesse de déformation, certains fluides plus complexes ont un comportement non-linéaire entre contrainte et vitesse de déformation. Il s'agit des fluides **non-newtoniens** :

- fluides plastiques ou de Bingham (dotés d'une contrainte seuil à dépasser pour déclencher l'écoulement, cf. Fig. 5.2, (2))
ex : dentifrice, ketchup, graisse, peintures non-coulantes...
- fluides rhéofluidifiants (les plus courants des fluides complexes) dont la viscosité diminue lorsque la contrainte augmente, cf. Fig. 5.2, (3))
ex : sang, encres, pâte à papier, peinture...
- fluides rhéoépaississants (cf. Fig. 5.2, (4))
ex : sable mouillé, maïzena

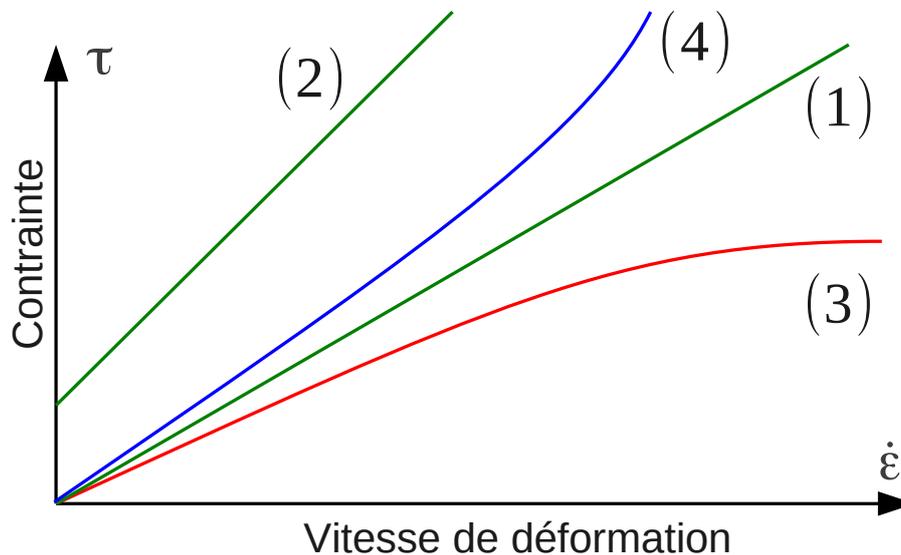


FIGURE 5.2 – Fluide (1) newtonien, (2) de Bingham, (3) rhéofluidifiant et (4) rhéoépaississant

5.2 Caractérisation des fluides newtoniens

Dans le cas des fluides newtoniens, la viscosité est indépendante du cisaillement : on parle alors de **viscosité absolue** (cf. Fig. 5.3).

Le modèle mathématique pour caractériser ces fluides est très simple. On définit μ la viscosité par :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\epsilon}} = \tan \alpha = \text{cte} \quad (5.1)$$

- 1 seule mesure suffisante à T et p donnés
- rhéomètre non nécessaire \rightarrow viscosimètres $\mu = f(T,p)$
- Exemples de fluides newtoniens : eau, plupart des solvants, huiles minérales, etc.

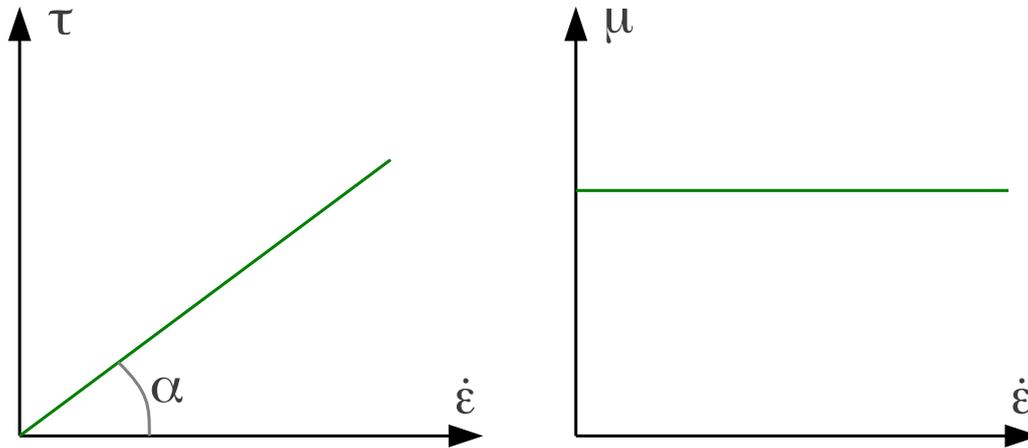


FIGURE 5.3 – Rhéogramme type pour un fluide newtonien

La viscosité introduite plus haut est qualifiée de **viscosité dynamique** :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\epsilon}} \quad \text{en Pa.s} \quad (5.2)$$

Elle est de l'ordre de 10^{-3} Pa.s pour l'eau. On peut également l'exprimer en poiseuille (Pl : 1 Pl = 1 Pa.s) ou en poise (Po : 1 Po = 0,1 Pa.s).

Il existe également une autre viscosité, la **viscosité cinématique** définie par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{en m}^2.\text{s}^{-1} \quad (5.3)$$

Elle est de l'ordre de 10^{-6} m².s⁻¹ pour l'eau. Les deux viscosités dépendent de la température du fluide considéré (cf. Fig. 5.4).

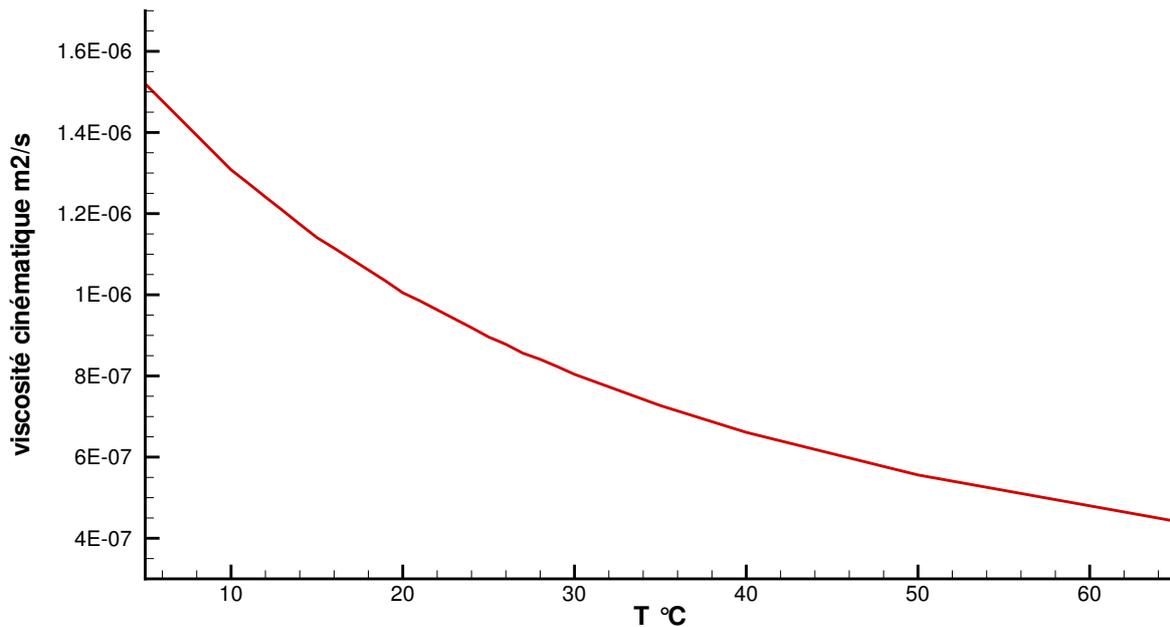


FIGURE 5.4 – Évolution de la viscosité cinématique de l'eau en fonction de la température



<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

6.1	Régimes d'écoulement	39
6.2	Nombre de Reynolds	40
6.3	Calcul des pertes de charges	41
6.3.1	Pertes de charges linéaires	42
6.3.2	Pertes de charges singulières	45

Nous allons maintenant considérer les fluides réels ($\mu \neq 0$) newtoniens ($\tau \propto \dot{\epsilon}$).

6.1 Régimes d'écoulement

L'expérience de Reynolds¹ a été réalisée en 1883. Il s'agit sans doute de la première véritable expérience de visualisation. Elle consiste à observer l'écoulement d'un liquide dans un tube transparent dont la paroi intérieure est peu rugueuse. Une expérience similaire est présentée à la Fig.6.1.

Grâce à cette expérience, différents régimes d'écoulement ont pu être identifiés. À l'heure actuelle, cette notion de régime d'écoulement nous permet encore de dimensionner les réseaux aérauliques et hydrauliques de distribution de fluide.

Dans les conduites industrielles en charge (pleine de fluide) :

- régime laminaire : $Re < 2000$
- régime turbulent : $Re > 3000$



Ces valeurs limites du nombre de Reynolds sont empiriques et à manier avec précaution. Dans la littérature, ces valeurs peuvent différer d'une source à l'autre. Elles ne sont valables que pour des écoulements de fluides dans des conduites industrielles.

1. ■ ■ IR Osborne REYNOLDS, 1842-1912

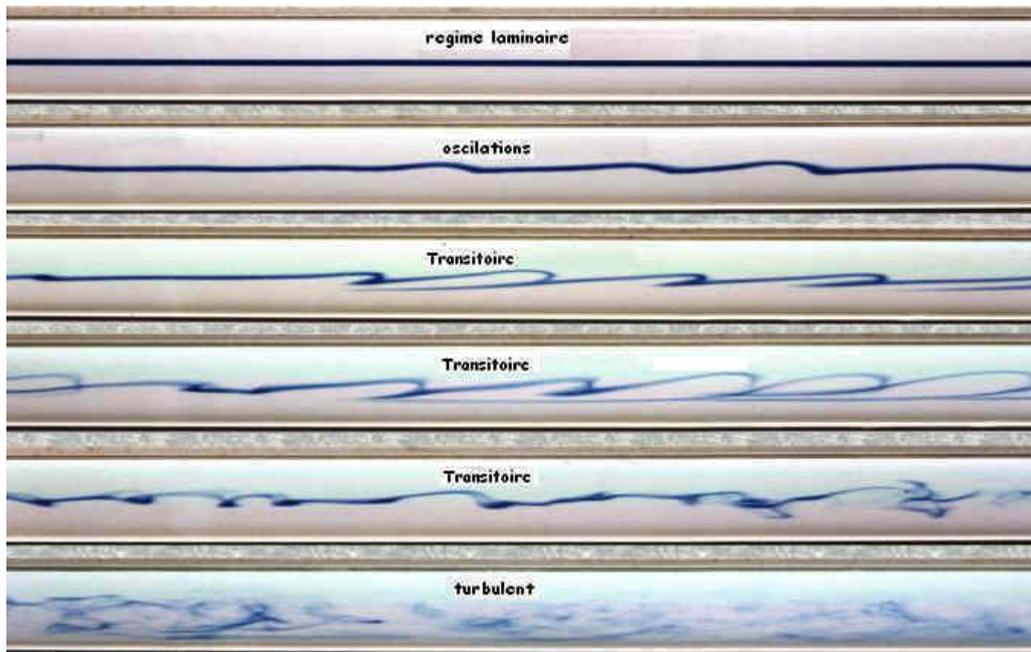


FIGURE 6.1 – Régimes d'écoulements dans une conduite circulaire pleine transparente

6.2 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre adimensionnel (sans dimension) qui s'écrit :

$$\text{Re} = \frac{\rho U_{\text{ref.}} L_{\text{ref.}}}{\mu} = \frac{U_{\text{ref.}} L_{\text{ref.}}}{\nu} \quad (6.1)$$

En hydraulique, la vitesse de référence est la vitesse débitante U_d (qu'on notera U par la suite) comme le rapport du débit volumique et de la section de passage pour un écoulement industriel dans une conduite :

$$U_{\text{ref.}} = U_d = U = \frac{q_v}{S} \quad (6.2)$$

De même, la longueur de référence est le diamètre hydraulique D_h qui est un multiple du rapport entre la section de passage du fluide et le périmètre mouillé de la conduite :

$$L_{\text{ref.}} = D_h = \frac{4 S}{P} \quad (6.3)$$

avec P le périmètre mouillé.

On arrive donc, en hydraulique, à cette définition du nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{U D_h}{\nu} = \frac{\rho U D_h}{\mu} \quad (6.4)$$



pour une conduite circulaire de diamètre D pleine (en charge)

$$D_h^\circ = 4 \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\pi D} = D$$

pour une conduite de section carré de côté a pleine

$$D_h^\square = 4 a^2 \frac{1}{4 a} = a$$

6.3 Calcul des pertes de charges

Considérant un fluide visqueux, nous ne pouvons plus considérer que l'énergie au début de la ligne de courant est la même qu'à la fin de cette même ligne de courant. En effet, la viscosité va générer un frottement visqueux entre le fluide et les parois solides qui va entraîner une perte d'énergie. La charge ne conserve plus, il faut donc arriver à quantifier ces **pertes de charge**.

En prenant en compte les effets visqueux, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\underbrace{p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2}_{E_1} + \delta W = \underbrace{p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2}_{E_2} + \delta E_{1 \rightarrow 2} \quad (6.5)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{E_1 + \delta W = E_2 + \delta E_{1 \rightarrow 2}} \quad (6.6)$$



En étant placé conventionnellement placé à droite de l'égalité, le terme $\delta E_{1 \rightarrow 2}$ est nécessairement positif ou nul puisque $E_1 \geq E_2$.

Pour les écoulements industriels dans des conduites, les pertes de charges peuvent être réparties en deux catégories :

- les pertes de charges linéaires (ou linéiques, ou régulières)
- les pertes de charges singulières (ou ponctuelles)

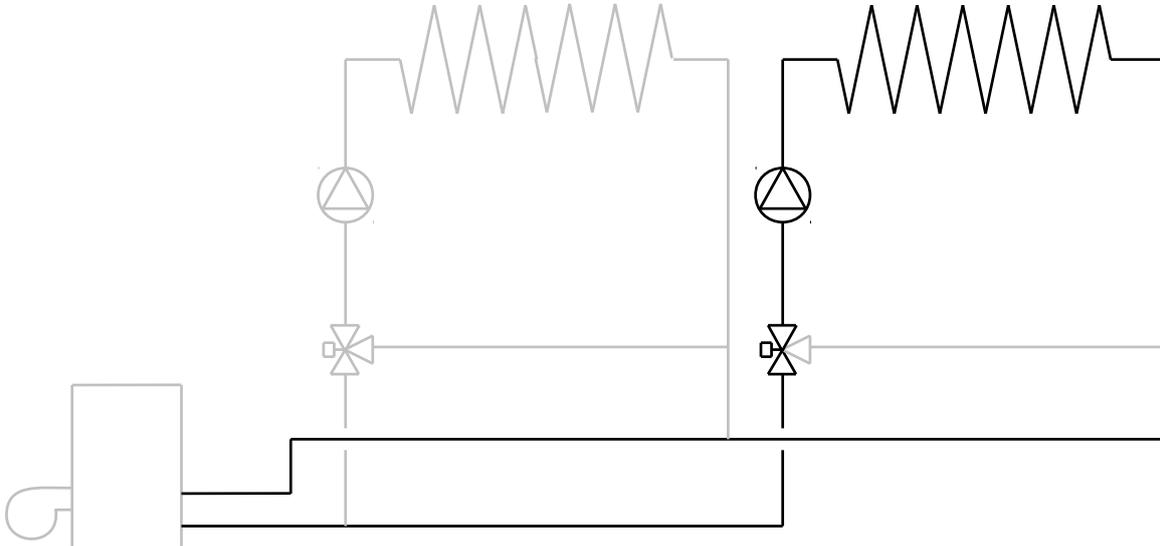


FIGURE 6.2 – Montage en mélange de deux radiateurs thermiques alimentés par une chaudière

Matériau	Rugosité ε (en mm)
cuivre	0,001 – 0,002
PVC	0,0015
acier inox.	0,015
acier galvanisé	0,15 – 0,3
fonte	0,8 – 1,5
béton	0,25

TABLE 6.1 – Rugosité pour certains matériaux

Par exemple sur la Fig. 6.2, le circuit mis en évidence comptabilise :

- 9 tronçons droits (donc 9 pertes de charges linéiques)
- 8 accidents : coudes à 90°, radiateur, vanne (donc 9 pertes de charges ponctuelles)

la perte de charge totale du réseau sera la somme totale des 17 pertes de charges énumérées ci-dessus.

6.3.1 Pertes de charges linéaires

Il est possible de déterminer la valeur d'une perte de charge linéaire avec l'équation de Darcy²-Weisbach³ :

$$\delta E_{1 \rightarrow 2}^L = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \rho U_2^2 \quad (6.7)$$

L et D_h sont respectivement la longueur et le diamètre hydraulique intérieur du tronçon considéré. λ , coefficient sans dimension, est le coefficient de perte de charge linéaire.

Le diagramme de Moody p. 43 nous permet de déterminer graphiquement ce coefficient.

Il existe des formules qui nous permettent d'obtenir numériquement une valeur du coefficient de perte de charge linéaire.

En régime laminaire, la valeur du nombre de Reynolds est suffisant pour déterminer ce coefficient via la formule d'Hagen⁴-Poiseuille⁵

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (6.8)$$

En régime turbulent, en plus du nombre de Reynolds, il faut connaître la rugosité de la conduite ε et passer par la corrélation de Haaland :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \log \left[\frac{6,9}{\text{Re}} + \left(\frac{\varepsilon}{3,7 D} \right)^{1,11} \right] \quad (6.9)$$

2.  FR Henry DARCY, 1803-1858

3.  DE Julius Ludwig WEISBACH, 1806-1871

4.  DE Gotthilf Heinrich Ludwig HAGEN, 1797-1884

5.  FR Jean Léonard Marie POISEUILLE, 1797-1869

Moody Diagram

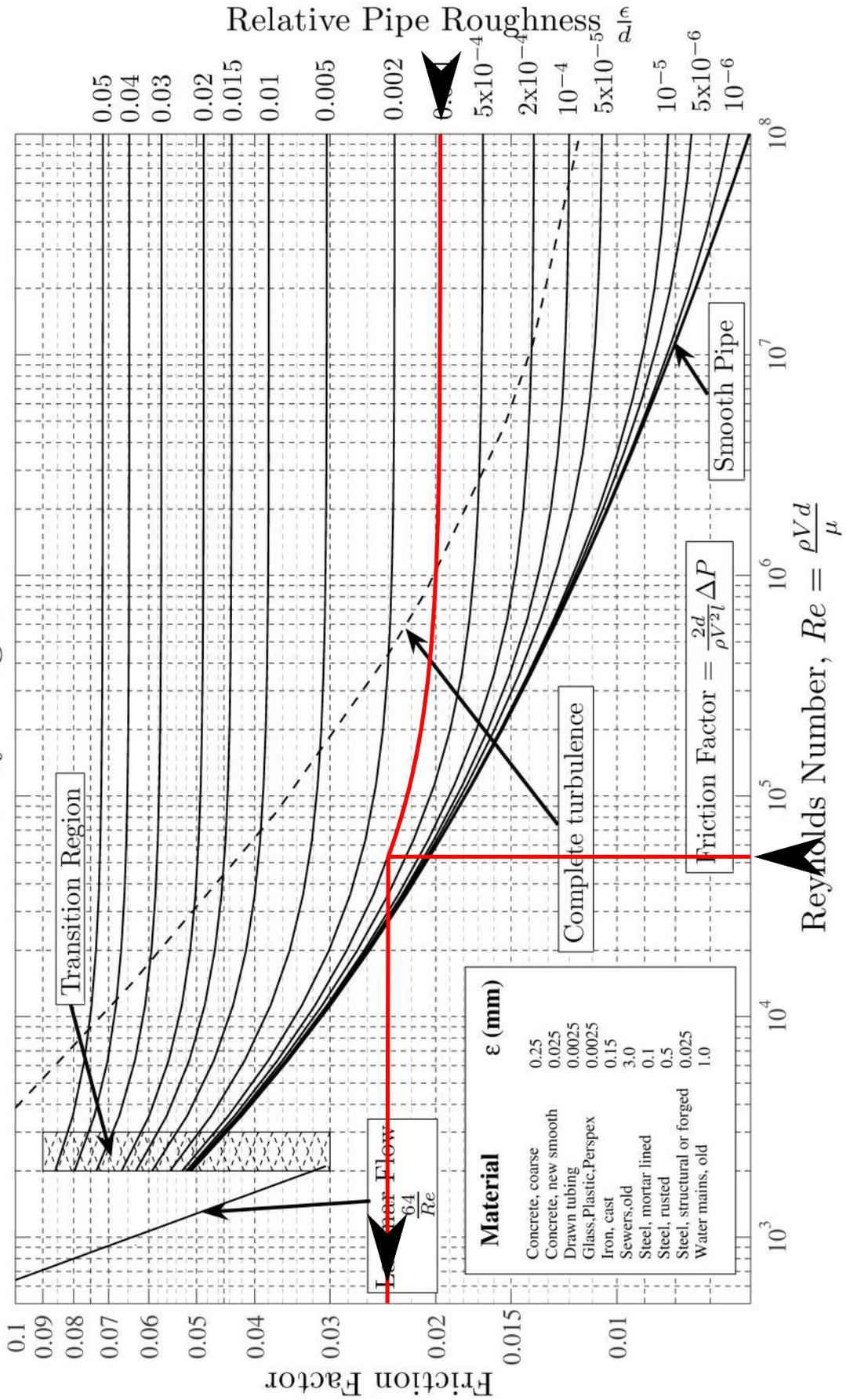


FIGURE 6.3 – Diagramme de Moody (λ est qualifié ici de *friction factor*)

Il est intéressant de constater que nous pouvons distinguer deux régimes en plus des régimes laminaires et turbulents : le régime **hydrauliquement lisse**, le régime **hydrauliquement rugueux** (au delà de $Re=10^5$).

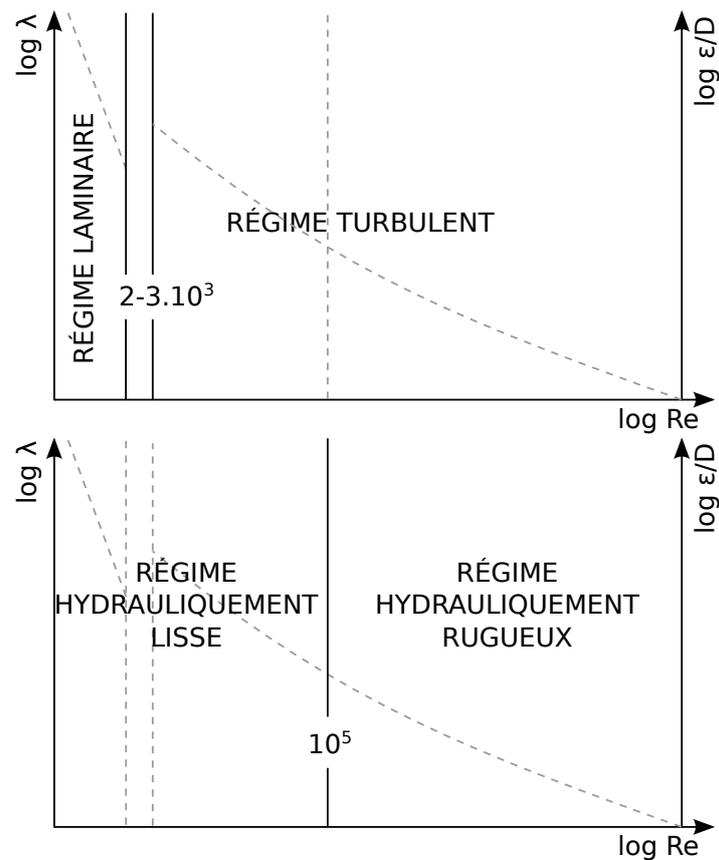


FIGURE 6.4 – Représentations schématiques du diagramme de Moody

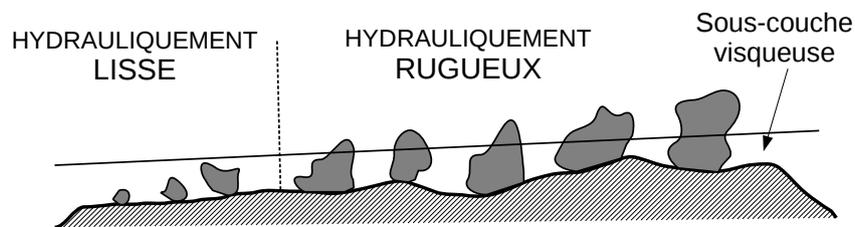


FIGURE 6.5 – Épaisseur de sous-couche visqueuse et régimes hydrauliquement lisses et rugueux.

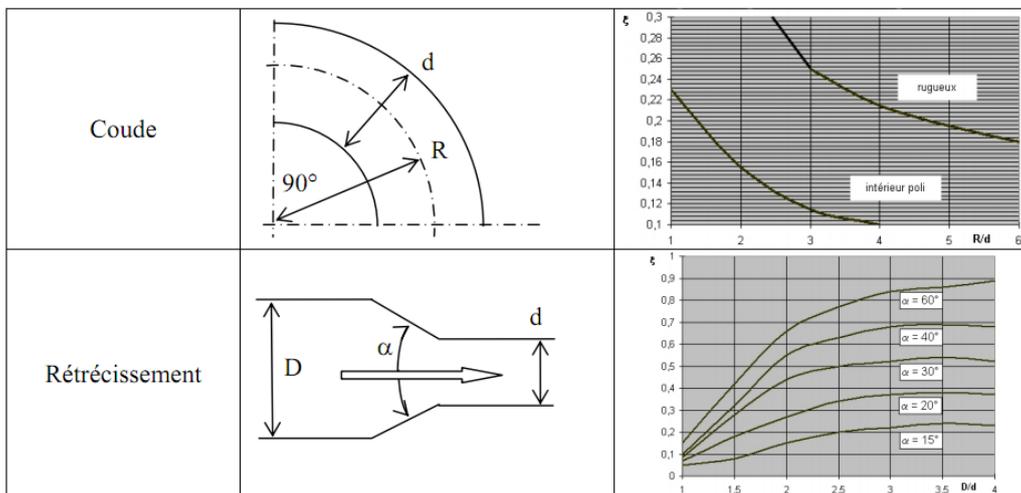
6.3.2 Pertes de charges singulières

Ces pertes de charges peuvent être évaluées avec la formule suivante :

$$\delta E_{1 \rightarrow 2}^S = \xi \frac{1}{2} \rho U_2^2 \quad (6.10)$$

avec ξ ou ζ le coefficient de perte de charge singulière (sans dimension).

	Configuration	Valeur de la constante ξ
Forme en "T"		1,2
		0,1
Forme en "Y"		0,5
		2,5 à 3
		0,06 ← 0,15 →



Rétrécissement : sens de l'écoulement →		d/D	$\xi \rightarrow$	$\xi \leftarrow$
		0,1	0,4	0,81
		0,2	0,38	0,64
		0,4	0,3	0,36
Elargissement : sens de l'écoulement ←		0,6	0,18	0,16
		0,8	0,05	0,04
	0,9	0,015	0,01	



<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

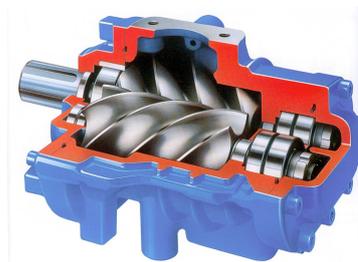
7.1	Machines volumétriques	48
7.2	Turbomachines	48
7.3	Charge manométrique hauteur manométrique	49
7.4	Courbe caractéristique d'une pompe	50
7.5	Couplage de machines fluides	51
7.5.1	Couplage en série de deux pompes identiques	51
7.5.2	Couplage en parallèle de deux pompes identiques	52



(a)



(b)



(c)

FIGURE 7.1 – (a) Pompe centrifuge, (b) Turbine Pelton, (c) Compresseur à vis

Une machine fluide va permettre un échange d'énergie entre système mécanique et **fluide** ou inversement. On retrouve les machines fluides dans de nombreux domaines de l'industrie :

hydraulique aménagement des chutes, des barrages, accumulation, irrigation, distribution d'eau potable

nucléaires circulation du circuit primaire et secondaire des centrales nucléaires, turbines génératrices d'électricité

génie climatique installations frigorifiques, Pompes À Chaleur (PAC), Centrales de Traitement d'Air (CTA), circulateurs

propulsion maritime, aéronautique ou astronautique, turbocompresseurs des véhicules automobiles

Il existe deux grandes catégories de machines fluides : les machines volumétriques et les turbomachines.

7.1 Machines volumétriques

Elles sont caractérisées par les éléments suivants :

- pas de communication entre l'entrée et la sortie
- **alternatives** : plusieurs cavités à volumes variables (chambre à piston)
- **rotatives** : plusieurs cavités se déplaçant de manière continue (engrenages)

Dans ces types de machines fluides, nous sommes en présence de trois phases périodiques :
(1) admission → (2) évolution en vase clos → (3) échappement

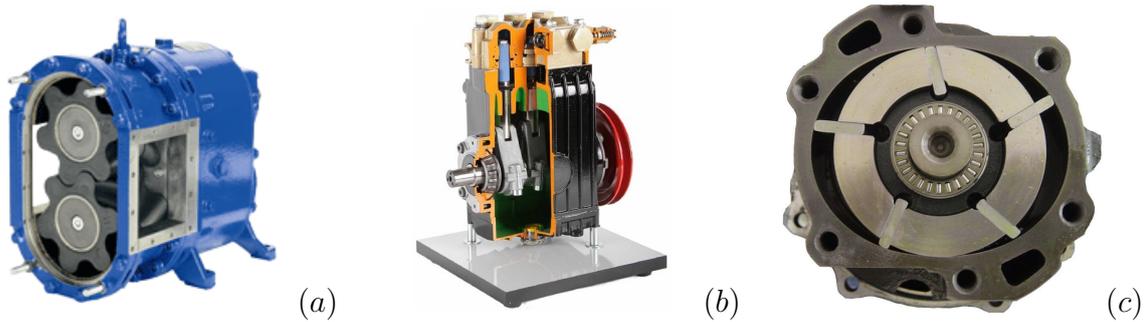


FIGURE 7.2 – Exemples de machines volumétriques : (a) pompe à engrenages, (b) pompe à piston, (c) pompes à palettes

7.2 Turbomachines

Elles sont caractérisées par les éléments suivants :

- application d'un couple au fluide
 - organe tournant : rotor ou roue dotée d'aubes ou d'aubages
 - écoulement continu, l'entrée communique avec la sortie
- ex : pompe centrifuge, hélice, éolienne, turbine hydraulique, etc.

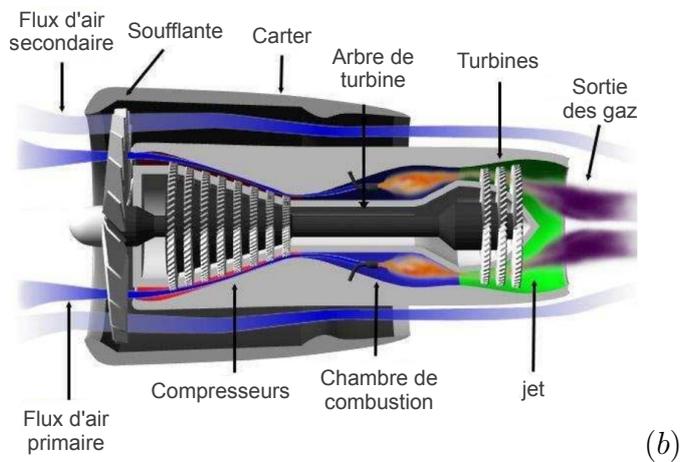


FIGURE 7.3 – Soufflante d'un turboréacteur (a) et schéma de fonctionnement d'un turbofan (b)

7.3 Charge manométrique hauteur manométrique

La charge en [Pa] d'une machine à fluide est définie par :

$$\delta W = \frac{P}{q_v} \quad (7.1)$$

avec P la puissance **hydraulique** (en W) et q_v le débit volumique (en [m³.s⁻¹]).

La charge manométrique représente le **travail des parois mobiles par unité de volume** ([J/m³]=[Pa]).



Démontrer que δW est bien homogène à P/q_v .

Par convention :

- $\delta W > 0$ pour une machine génératrice (ex. : pompe, compresseur, hélice, etc.)
- $\delta W < 0$ pour une machine réceptrice (ex. : turbine, éolienne, moulin à vent, etc.)

La **hauteur manométrique** est définie par :

$$H_{\text{mano}} = H = \frac{\delta W}{\rho g} \quad (7.2)$$

On peut remarquer que la hauteur manométrique est homogène à une longueur. Si $\rho = \rho_{\text{eau}}$, alors l'unité de la hauteur manométrique sera le mètre de colonne d'eau [mCE].

7.4 Courbe caractéristique d'une pompe

La courbe caractéristique d'une pompe est l'évolution de sa hauteur manométrique en fonction du débit.

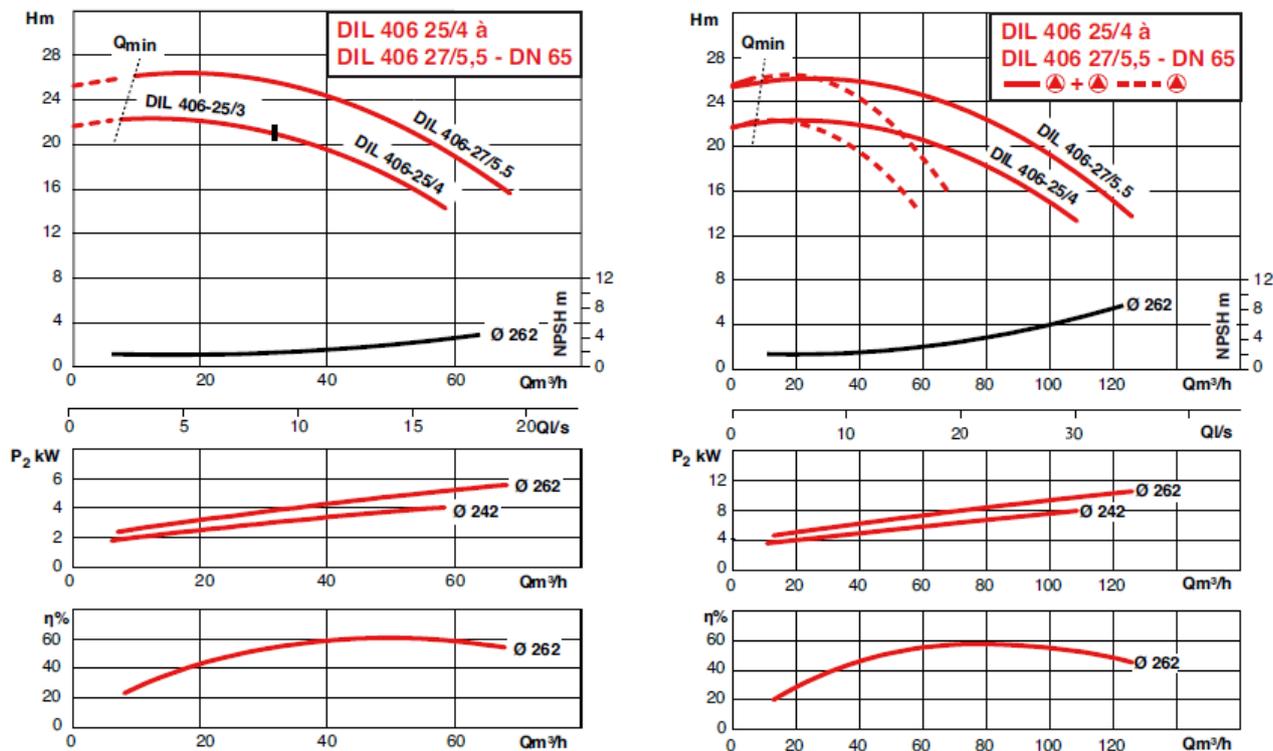


FIGURE 7.4 – Exemples de courbes caractéristiques d'une pompe issues de données constructeur



FIGURE 7.5 – Exemple de couplage en parallèle de 2 pompes identiques

7.5 Couplage de machines fluides

Il est courant de disposer des machines fluides l'une derrière l'autre (en série), ou côte à côte (en parallèle cf. Fig. 7.5). Dans ces cas, les courbes caractéristiques résultantes de ce couplage ne sont bien sûr pas identiques à chacune des courbes caractéristiques des machines fluides seules. Il est par contre possible de déterminer la courbe résultante à partir de la courbe de la machine fluide seule.

Dans ce paragraphe, nous nous attacherons à déterminer les courbes caractéristiques résultantes pour deux pompes identiques.

7.5.1 Couplage en série de deux pompes identiques

Soient deux pompes A et B , q_v et H_{mano} le débit volumique et la hauteur manométrique fournis par une seule pompe. Par définition :

$$(q_v)_A = (q_v)_B \quad \text{et} \quad (H_{\text{mano}})_A = (H_{\text{mano}})_B \quad (7.3)$$

Lorsque ces deux pompes seront montées en série, le couplage engendrera les caractéristiques suivantes :

$$q_v = (q_v)_A = (q_v)_B \quad \text{et} \quad H_{\text{mano}} = (H_{\text{mano}})_A + (H_{\text{mano}})_B \quad (7.4)$$

Les hauteurs manométriques s'ajoutent tandis que le débit reste le même et égal à celui d'une pompe. Attention cependant au fait que si les machines sont de performances différentes, la moins débitante peut dissiper une partie de l'énergie fournie par l'autre.

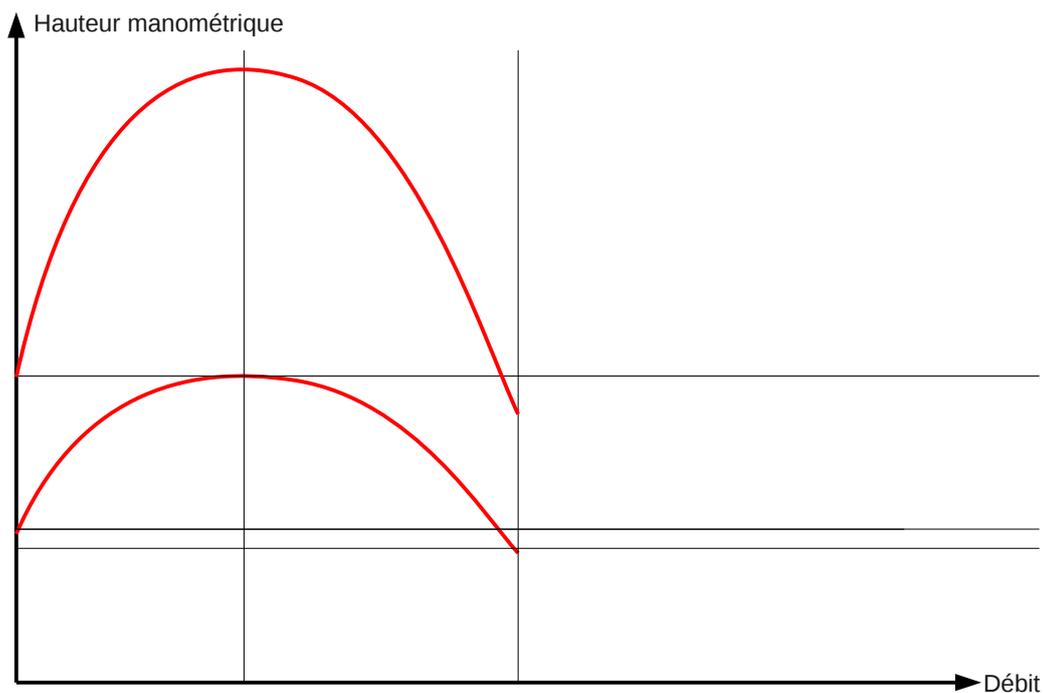


FIGURE 7.6 – Construction de la courbe caractéristique résultant d'un couplage de deux pompes identiques en série

7.5.2 Couplage en parallèle de deux pompes identiques

Lorsque ces deux pompes seront montées en série, le couplage engendrera les caractéristiques suivantes :

$$q_v = (q_v)_A + (q_v)_B \quad \text{et} \quad H_{\text{mano}} = (H_{\text{mano}})_A = (H_{\text{mano}})_B \quad (7.5)$$

Les débits des pompes s'ajoutent alors que la hauteur manométrique reste identique. De même que dans le cas précédent, si les machines sont de performances différentes, la moins débitante peut être parcourue par un débit négatif.

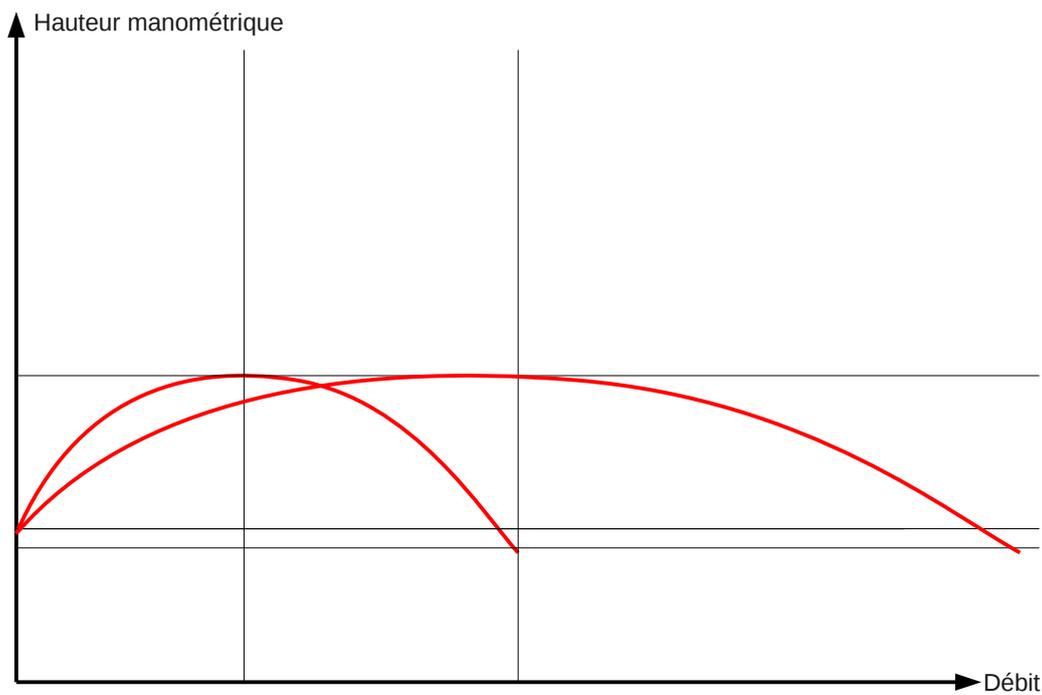


FIGURE 7.7 – Construction de la courbe caractéristique résultant d'un couplage de deux pompes identiques en parallèle



<http://matwo.fr/ensam>

Sommaire

8.1	Unités et système international	54
8.1.1	Unités du système international	54
8.1.2	Unités fondamentales du système international	54
8.2	Dépendance dimensionnelle	55
8.3	Nombre de grandeurs dimensionnellement indépendantes	57
8.4	Théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème des II)	57
8.4.1	Théorème	57
8.4.2	Détermination des produits adimensionnels II	58
8.5	Bilan de l'analyse dimensionnelle	60
8.6	Similitudes	60
8.6.1	Définition	60
8.6.2	Application	60

Ce chapitre va nous permettre de faire des similitudes qui auront pour but :

- d'extrapoler des résultats d'une expérience à petite échelle à un cas à grande échelle (maquette d'avion dans une soufflerie, avion réel en plein vol)
- réduire les paramètres à faire varier lors d'études paramètres
- apporter du sens à des équations complexes

Pour cela, nous devons au préalable rappeler quelques notions d'analyse dimensionnelle.

Introduction : système homogène d'unités

En considérant la loi fondamentale de la dynamique de Newton, deux choix s'offrent à nous quant au système d'unités à adopter :

- faire de l'unité de mesure de la force une unité dérivée des unités de masse, de longueur et de temps :

$$\boxed{F = m \gamma} \tag{8.1}$$

— conserver une constante étalon séparée K pour lier la force au produit $(m \gamma)$:

$$\boxed{F = K m \gamma} \quad K = \text{cte} \quad (8.2)$$

C'est évidemment le choix 1 qui sera retenu. Cependant, ce choix reconnaît implicitement la validité de la loi de Newton. A priori, si la loi de Newton n'est pas définie, l'unité de la force non plus...

8.1 Unités et système international

8.1.1 Unités du système international

Quelques unités suffisent à la construction de toutes les unités dérivées. Retenues en 1954, ces unités sont qualifiées d'unités du **système international** (unifié en 1960).

Ex. : le mètre, et son unité dérivée le miles

8.1.2 Unités fondamentales du système international

7 unités suffisent à exprimer l'ensemble des unités du systèmes international. Ces unités sont qualifiées d'unités **fondamentales** du système international. En faisant l'analogie avec l'algèbre linéaire, ces 7 unités constituent une base d'unités indépendantes.

mécaniques	masse	[kg]	M
	longueur	[m]	L
	temps	[s]	T
thermodynamiques	température	[K]	θ
	intensité électrique	[A]	I
	quantité de matière	[mol]	N
	intensité lumineuse	[cd]	J



Remarques :

- le symbole du Kelvin est K (et non pas °K)
- si le nom de l'unité provient d'une personne, la dénomination de l'unité ne prend pas de majuscule mais son symbole oui (seul le litre [L] peut prendre une majuscule par souci de lisibilité^a)

a. Les symboles L (majuscule) et l (minuscule) sont les deux symboles acceptés par le Comité international des poids et mesures pour représenter le litre. Il est conseillé d'utiliser la minuscule l chaque fois que possible par défaut, ou la majuscule L s'il y a un risque de confusion avec le chiffre 1.

Ex. :

- vitesse : $[V] = L.T^{-1}$
- accélération : $[\gamma] = L.T^{-2}$
- force : $[F] = [M].[\gamma] = M.L.T^{-2}$

Toute unité physique peut s'écrire comme une combinaison de ces 7 unités fondamentales. Pour une grandeur G :

$$\forall G, \exists (m,l,t,k,i,n,j) \in \mathbb{Q}^7 \quad (8.3)$$

$[G] = M^m.L^l.T^t.\theta^k.I^i.N^n.J^j$



Écrire l'équation aux dimensions des grandeurs suivantes

1. champ de pesanteur g
2. pulsation ω
3. nombre de Reynolds, Re
4. énergie E
5. viscosité dynamique μ

8.2 Dépendance dimensionnelle

En reprenant l'exemple de la force :

$$[F] = [M].[\gamma] = M.L.T^{-2} \quad (8.4)$$

le fait de pouvoir écrire que $[F]$ « est homogène à » $[M].[\gamma]$ signifie que $[F]$, $[M]$ et $[\gamma]$ constitue un groupement **dimensionnellement dépendant**.

Dans la suite, pour alléger les écritures, nous noterons :

$$[F] = M.\gamma = M.L.T^{-2}$$

au lieu de :

$$[F] = [M].[\gamma] = M.L.T^{-2}$$

De même, le travail $[W]$, la force et la longueur constituent un groupement dimensionnellement dépendant puisque nous pouvons écrire :

$$[W] = F.L \quad (8.5)$$



Est-ce que la masse volumique $[\rho]$, la vitesse $[U]$ et un diamètre $[D]$ constituent un groupement dimensionnellement dépendant ?

Il est difficile de démontrer qu'un groupement est dimensionnellement **indépendant**. Pour ce faire, il faut passer par la construction de la matrice aux dimensions fondamentales qui récapitule la puissance des unités fondamentales utilisées pour exprimer l'unité en question.

Par exemple, pour le groupement $[\rho]$, $[U]$ et $[D]$, la matrice aux dimensions s'écrit de la façon suivante :

$$\text{Mat.} = \begin{pmatrix} [M] & [L] & [T] \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} [\rho] \\ [U] \\ [D] \end{matrix} \quad (8.6)$$

en effet, $[\rho] = M^1 . L^{-3} T^0$.

$[A]$, $[B]$ et $[C]$ sont des grandeurs dimensionnellement indépendantes si et seulement si le déterminant de la matrice aux dimensions $\neq 0$

Pour l'exemple du groupement $[\rho]$, $[U]$ et $[D]$:

$$\begin{aligned} \Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 0 \times \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \times \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times [1 \times 0 - 1 \times (-1)] \neq 0 \end{aligned}$$

Lorsqu'un système met en jeu des grandeurs qui se mesurent à l'aide de k unités fondamentales, il existe au maximum k grandeurs dimensionnellement indépendantes.



Remarques :

- ce théorème implique que la matrice aux dimensions à considérer sera toujours carrée
- $\det \text{Mat.} = \det ({}^t \text{Mat.})$ ce qui signifie qu'il est possible d'écrire la matrice aux dimensions en colonne ou en ligne

Pour revenir à l'analogie avec l'algèbre linéaire, un groupement de grandeurs dimensionnellement indépendantes constituent une **nouvelle base** de l'espace vectoriel.

8.3 Nombre de grandeurs dimensionnellement indépendantes

Dans toute relation physique mettant en jeu des **grandeurs** mesurées à l'aide d'un système homogène d'unités comptant k **unités fondamentales**, on ne peut trouver plus de k **grandeurs dimensionnellement indépendantes**.

Pour revenir à l'analogie avec l'algèbre linéaire, il est clair que si la base principale est composée de k vecteurs, on ne peut extraire une base composée **au plus** de k vecteurs.

En poussant plus loin l'analogie, considérons un repère cartésien tri-dimensionnel. Sa base principale est constituée de 3 vecteurs. Pour exprimer n'importe quel vecteur de l'espace, nous pourrions constituer une autre base qui sera composée de maximum 3 vecteurs (indépendants). Par contre, si tous les vecteurs que nous devons exprimer sont dans un plan, alors la nouvelle base peut être constituée uniquement de 2 vecteurs indépendants. De même si, tous les vecteurs sont colinéaires, la nouvelle base pourra être constituée d'un seul vecteur.

En mécanique des fluides incompressibles, notre problème s'exprimera presque toujours à l'aide de 3 unités fondamentales ($[M].[L].[T]$).

8.4 Théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème des Π)

8.4.1 Théorème

Toute dépendance fonctionnelle entre g grandeurs exprimées dans un système à k unités fondamentales peut être remplacée par une relation entre $(g - k)$ produits sans dimension (notés Π).

Prenons un exemple pour illustrer ce théorème : la perte de charge linéique. Avant de connaître l'équation de Darcy-Weisbach (cf. Éq. (6.7) p. 42), les scientifiques avaient remarqué que le coefficient de perte de charge linéique λ variait avec :

- la vitesse d'écoulement U
- le diamètre D
- la rugosité de la conduite ε
- le fluide considéré de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ

Il était alors envisageable de lancer une étude paramétrique avec 6 grandeurs de manière à déterminer la fonction f telle que :

$$\lambda = f(U, D, \varepsilon, \rho, \mu) \quad (8.7)$$

En utilisant le théorème de Vaschy-Buckingham cité plus haut, nous avons :

- $g = 6$ (5 grandeurs et λ)
- $k = 3$ (chaque grandeur citée peut s'exprimer comme une combinaison des 3 unités fondamentales mécaniques ($[M].[L].[T]$)) :

$$\left. \begin{aligned} [U] &= L.T^{-1} \\ [D] &= L \\ [\mu] &= M.L^{-1}.T^{-1} \\ [\rho] &= M.L^{-3} \\ [\varepsilon] &= L \\ [\lambda] &= / \end{aligned} \right| \quad (8.8)$$

Donc d'après le théorème, l'Éq. 8.7 peut se ramener à :

$$\Pi_1 = f'(\Pi_2, \Pi_3) \quad (8.9)$$

les Π_i étant des produits sans dimension qui associent chacune des grandeurs précédentes. Ceci accourcit significativement l'étude paramétrique à mener.

8.4.2 Détermination des produits adimensionnels Π

En repartant de l'exemple précédent, nous devons déterminer 3 produits adimensionnels Π . Pour cela, nous devons extraire une base de la liste des grandeurs proposées et exprimer les grandeurs restantes en fonction de cette base.

Extraire une base signifie qu'il nous faut trouver au plus k grandeurs dimensionnellement indépendantes.

Dans notre exemple, $k = 3$. Nous devons donc trouver 3 grandeurs dimensionnellement indépendantes. Nous avons démontré plus haut (cf. § 8.2, p. 56) que le groupement $[\rho]$, $[U]$ et $[D]$, présent dans notre liste de grandeur, répondait à ces critères. Nous pouvons donc le choisir comme nouvelle base.

Il nous reste par conséquent plus que les grandeurs μ , λ et ε à exprimer en fonction de cette nouvelle base. Chacune d'elle devra nous permettre de formuler un produit sans dimension Π .

Il est aisé de constater que ε et D sont homogènes à L . Par conséquent, il est possible d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} [D] M^0.L^1.T^0 &= L \\ [\varepsilon] &= L \end{aligned} \right| \Rightarrow [D] = \varepsilon \Rightarrow \boxed{\Pi_1 = \frac{\varepsilon}{D}} \quad (8.10)$$

L'important étant que Π soit sans dimension, on aurait également pu définir Π_1 par :

$$\Pi_1' = \frac{D}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \Pi_1'' = \frac{\sqrt{2} D}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \Pi_1''' = \frac{\varepsilon^{215}}{D^{215}} \quad (8.11)$$

De même, λ étant déjà sans dimension, on peut écrire :

$$\boxed{\Pi_2 = \lambda} \quad (8.12)$$

Il nous reste donc à déterminer Π_3 associé à μ et à la base (ρ, U, D) . Nous cherchons donc $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tels que :

$$[\mu] = \rho^a.U^b.D^c \quad (8.13)$$

Si nous n'arrivons pas à déterminer ces coefficients rapidement, nous pouvons utiliser la **méthode systématique de Maxwell**. Cette méthode consiste dans un premier temps à récapituler les données de l'Éq. 8.13 dans un tableau de la forme :

grandeur	[M]	[L]	[T]	...	exposants
base	1	-3	0	...	a
⋮					
dépendante	1	1	-2	...	1

TABLE 8.1 – Forme du tableau employé dans la méthode de Maxwell

Ce qui nous donne pour notre exemple :

grandeur	[M]	[L]	[T]	exp.
ρ	1	-3	0	a
U	0	1	-1	b
D	0	1	0	c
μ	1	-1	-1	1

TABLE 8.2 – Tableau employé dans la méthode de Maxwell appliqué à l'Éq. 8.13

Pour assurer l'homogénéité, il suffit de faire le bilan sur chacune des colonnes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } M : \quad 1 \times a + 0 \times b + 0 \times c = 1 \times 1 \\ \text{sur } L : \quad -3 \times a + 1 \times b + 1 \times c = -1 \times 1 \\ \text{sur } T : \quad 0 \times a + -1 \times b + 0 \times c = -1 \times 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array} \right. \Rightarrow [\mu] = \rho U D \quad (8.14)$$

Finalement :

$$\Pi_3 = \frac{\rho U D}{\mu} = \text{Re} \quad (8.15)$$

Pour conclure sur l'exemple, l'Éq. 8.9 devient :

$$\lambda = f' \left[\frac{\varepsilon}{D}, \text{Re} \right] \quad (8.16)$$

L'étude paramétrique menée pour déterminer la fonction f' qui reste inconnue a permis d'obtenir le Diagramme de Moody (cf. § 6.3, p. 43).

8.5 Bilan de l'analyse dimensionnelle

Pour récapituler, énumérons les étapes de l'analyse dimensionnelle que nous avons réalisé :

1. lister les g paramètres du problème
2. exprimer les dimensions de chaque paramètre en fonction des dimensions fondamentales
3. compter k le nombre de dimensions fondamentales utilisées
4. déterminer k grandeurs parmi les g qui sont dimensionnellement indépendantes
5. former les produits adimensionnels (Π) associées aux $(g - k)$ grandeurs restantes

8.6 Similitudes

8.6.1 Définition

En plus de pouvoir faciliter les études paramétriques, ces produits adimensionnels vont nous permettre de réaliser des **similitudes**. On pourra par exemple extrapoler des résultats obtenus sur une maquette d'avion située dans une soufflerie à un avion réel en plein vol, ou encore des résultats issus d'essais réalisés sur un fluide peu onéreux/dangereux à des essais qui auraient été réalisés avec un fluide onéreux/dangereux.

Dans le cas d'une **similitude totale**, tous les produits adimensionnels sont égaux pour le modèle (réduit) et pour le prototype.

8.6.2 Application

Considérons la problématique suivante : une sonde de 3 m de diamètre évolue dans l'air et nous devons déterminer la force de traînée F_D pour un écoulement à $0,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Cependant, nous ne disposons que d'une veine d'essai en eau qui nous contraint à étudier une sphère de 10 cm de diamètre. Nous avons à notre disposition une balance hydrodynamique qui nous permet de mesurer la force de traînée dans notre veine d'essai. Quelle doit être la vitesse d'écoulement dans la veine d'essai ?

On peut récapituler les données dans le tableau suivant :

paramètre	prototype	modèle
géométrie	sphère	sphère
D	3 m	0,10 m
U	$0,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$?
ρ	$1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
ν	$1,5\cdot 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	$1,307\cdot 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

TABLE 8.3 – Récapitulatif des données du problème

L'analyse dimensionnelle nous donne le résultat suivant :

$$C_D = f \{ \text{Re} \} \quad \text{ou} \quad \frac{F_D}{0,5 \rho U^2 D^2} = f \left\{ \frac{U D}{\nu} \right\} \quad (8.17)$$

Nous pouvons dans un premier temps calculer le nombre de Reynolds pour le prototype et nous obtenons :

$$\text{Re}_p = 140000 \quad (8.18)$$

D'après la théorie des similitudes :

$$\text{Re}_p = \text{Re}_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_m = 1,83 \text{ m.s}^{-1}} \quad (8.19)$$

Nous lançons l'expérience et mesurons une force de traînée de 214 N sur notre modèle réduit. Quelle sera la valeur de la force de traînée sur notre prototype ?

Nous procédons de même pour le coefficient de traînée :

$$C_p = C_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{D,p} = 33,82 \text{ N}} \quad (8.20)$$