Arts et Métiers Sciences et Technologies
CER de Cluny

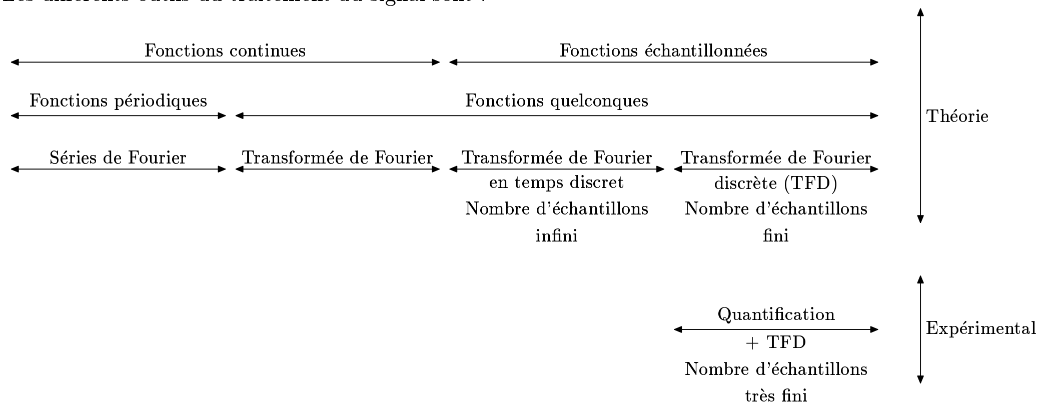
UEF-EEA (Intermédiaire) : Electronique, Electrotechnique et Automatique
Cours 6 résumé : traitement du signal

Pierre-Olivier LAFFAY

Version du 15 septembre 2020

Resumé cours 6

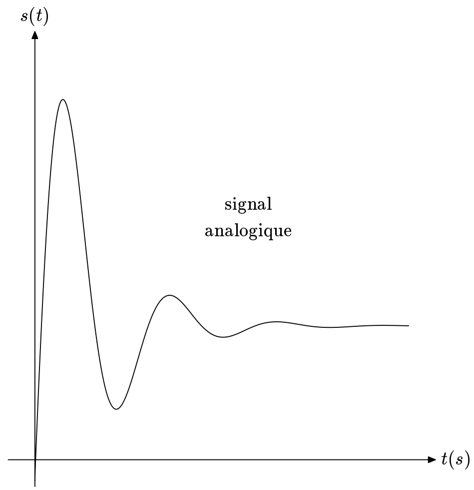
Les différents outils du traitement du signal sont :

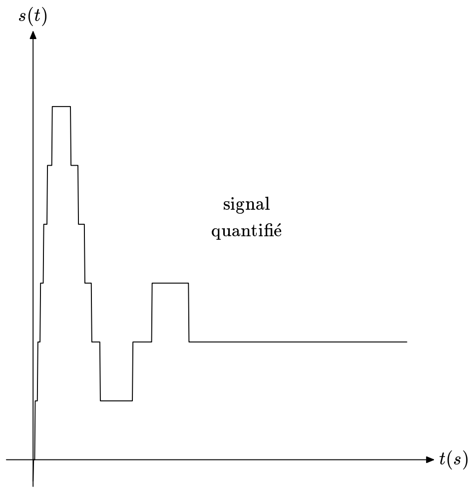


En pratique l'ingénieur utilise la transformée de Fourier discrète (TFD) sur un signal échantilloné avec un nombre d'échantilons fini.

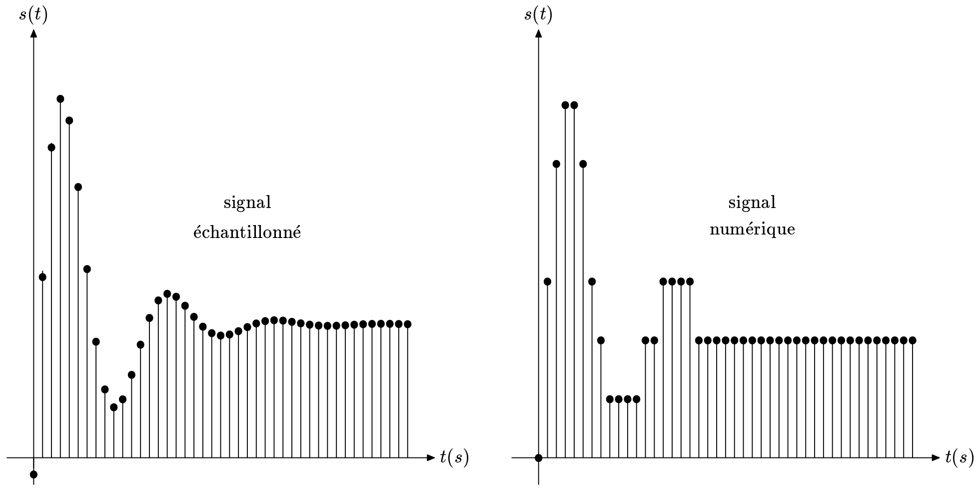
Les signaux peuvent être :

- analogiques : temps et amplitude continus
- quantifiés : temps continu et amplitude discrète
- échantillonnés : temps discret et amplitude continue
- numériques : temps et amplitude discrets



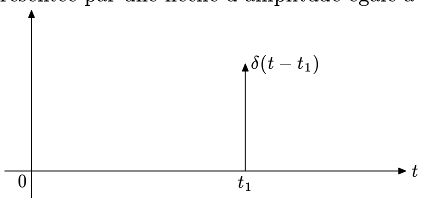


Resumé cours 6

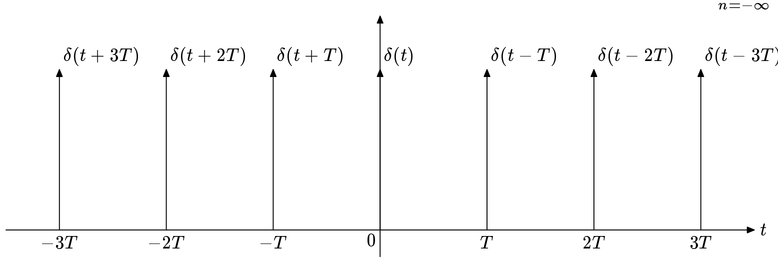


Si l'impulsion de Dirac se produit à un instant t_1 non nul alors il suffit de translater l'impulsion de Dirac de la manière suivante : $\delta(t-t_1)$.

Graphiquement $\delta(t-t_1)$ est représentée par une flèche d'amplitude égale à l'aire de l'impulsion (donc 1) :



Le peigne de Dirac est une suite de pics de Dirac espacés d'une période T : $Pgn_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$

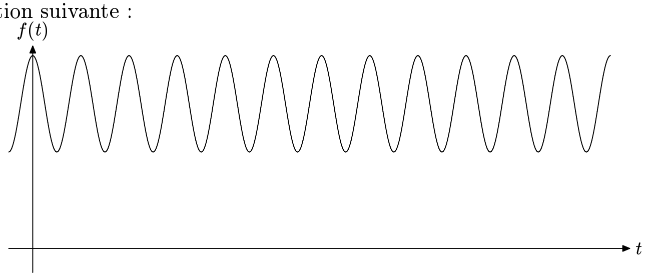


Resumé cours 6

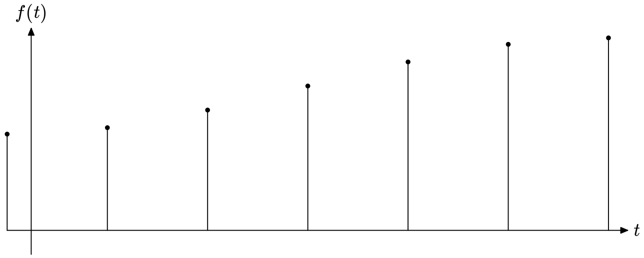
L'échantillonnage consiste à prélever un signal à des instants précis. On se limite au cas où les prélévements sont réalisés à la période d'échantillonnage T_e. Le signal échantillonné sera donc égal au produit usuel du signal de base par un peigne de Dirac $Pgn_{T_e}(t)$.

La fréquence d'échantillonnage doit être la plus élevée possible si l'on veut avoir une représentation acceptable du signal.

Considérons la fonction suivante :



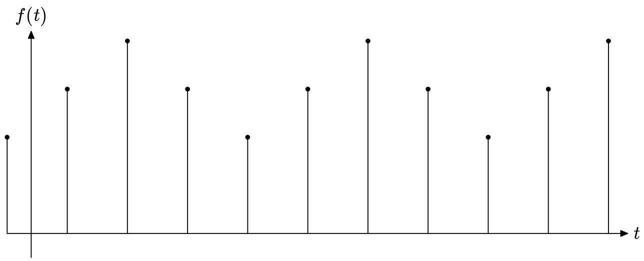
Avec 7 points cela donne :



Le signal échantillonné avec seulement 7 points ne ressemble pas au signal de base.

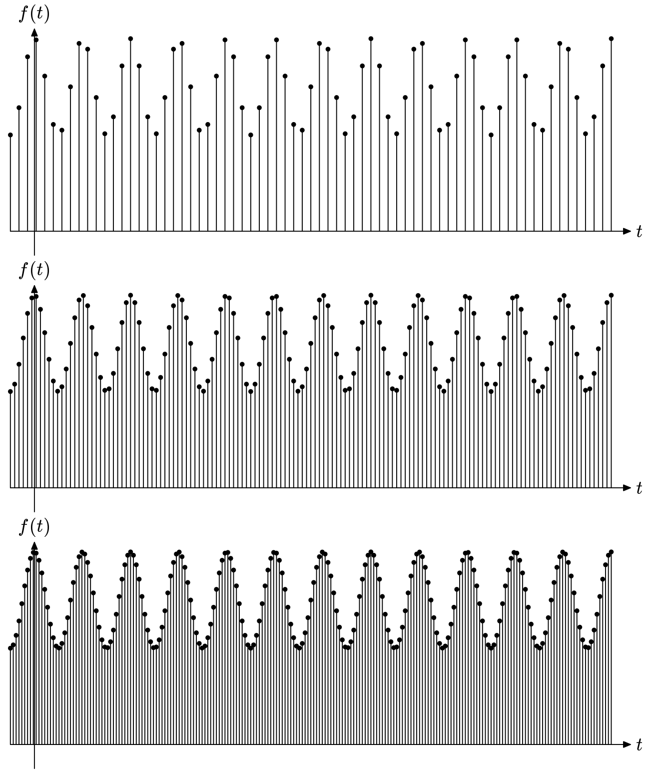
L'ingénieur qui ne se serait pas assez méfiant pourrait penser que le signal est très lentement variable et assez proche d'une évolution linéaire dans le temps.

Avec 11 points, on pourrait croire que le signal de base est une fonction triangle de fréquence plus base que celle du signal réel...

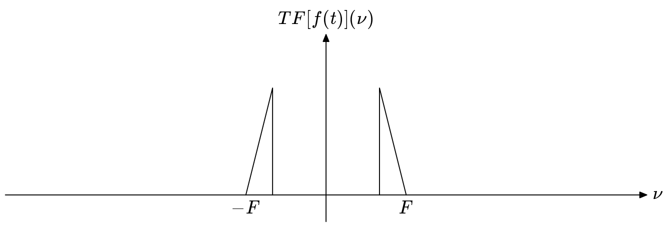


RESUMÉ COURS 6

Le signal échantillonnée ressemblera d'autant plus au signal réel que la fréquence d'échantillonnage sera élevée.



On considère un signal $f(t)$ dont la transformée de Fourier est à support borné :



UEF EEA Fiche résumé 1

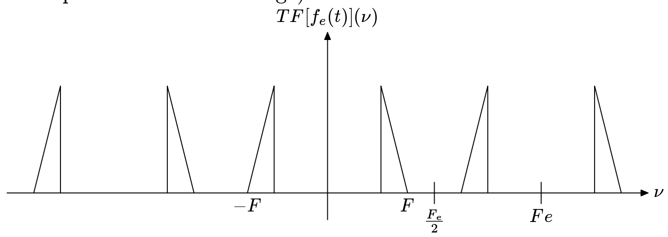
RESUMÉ COURS 6

Echantillonner ce signal à la fréquence d'échantillonnage F_e puis effectuer une transformée de Fourier revient à effectuer le calcul de la TF du produit simple entre $f(t)$ et le peigne de Dirac :

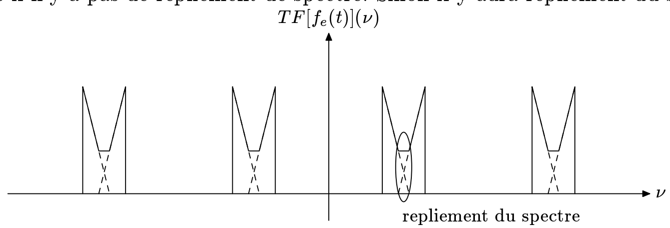
$$TF[f_e(t)](\nu) = TF[f(t) * Pgn_T(t)](\nu)$$

Tous calculs faits : $TF[f_e(t)](\nu) = F_e \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} TF[f](\nu - n * F_e)$

Ainsi la transformée de Fourier en temps discret (sous réserve d'une infinité de points...) est périodisée (avec une période égale à la fréquence d'échantillonnage) :



Si $Fe > 2 * F$ alors il n'y a pas de repliement de spectre. Sinon il y aura repliement du spectre :



La périodicité de la transformée de Fourier en temps discret permet d'étudier seulement l'intervalle $\left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$ (intervalle le plus logique) ou $[0, F_e]$. Il est primordial de noter que le domaine fréquentiel atteint correspondra physiquement à l'intervalle $\left[0, \frac{F_e}{2}\right]$.

Théorème de Shannon : Tout signal dont la transformée de Fourier est à support borné $[-F, F]$ est complétement défini par ses échantillons $x(nT_e)$ prélevés à la fréquence d'échantillonnage F_e au moins égale à $2F$.

Si la fréquence d'échantillonnage est inférieure à la fréquence de Shannon alors il y a repliement du spectre et les échantillons prélevés ne permettront pas d'obtenir des informations sur le signal réel.

En pratique la chaîne d'acquisition comportera un filtre passe bas de fréquence de coupure $\frac{F_e}{4}$.

Resumé cours 6

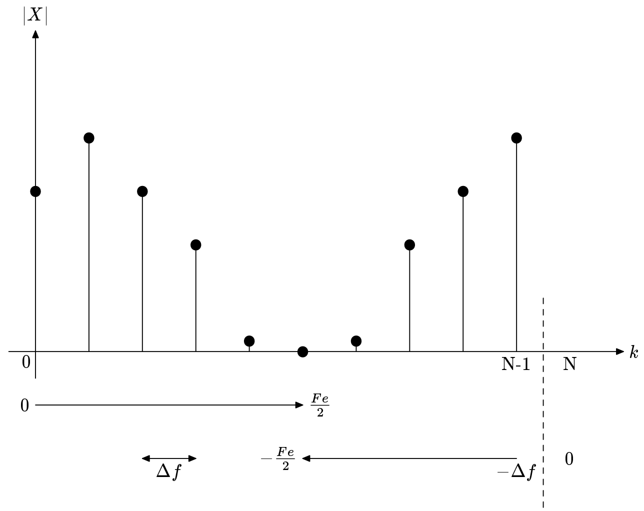
On considère une liste $x(n) = \{x(0), ..., x(N-1)\}$ comportant N échantillons prélevés à la période d'échantillonnage T_e.

La transformée de Fourier Discrète (TFD) associe à la liste orginale une nouvelle liste comportant aussi N valeurs : $X(k) = TFD[x(n)](k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}$ avec $k \in [\![0, N-1]\!]$

L'instant du n-ième ($n \in [\![0, N-1]\!]$) élément de la liste temporelle est $t_n = nT_e$. La fréquence du k-ième ($k \in [\![0, N-1]\!]$) élément de la liste fréquentielle est $f_k = k\Delta_f$ avec $\Delta_f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{NT_e}$.

Le domaine fréquentiel atteint correspondra physiquement à l'intervalle $\left[0, \frac{F_e}{2}\right]$. Les données dans l'intervalle $\left[\frac{F_e}{2}, F_e\right]$ étant la conséquence de la périodisation du spectre dûe à l'échantillonnage.

Si les $x(n)$ sont réels alors $X(N-k) = \overline{X}(k)$. Dans ce cas l'étude peut se restreindre à la première moitié de la TFD sans perte d'information.

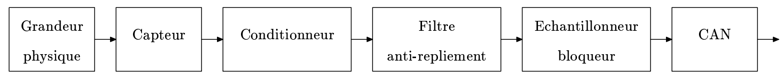


A noter : le graphique trace le module de la TFD.

La résolution fréquentielle Δ_f dépend de la fréquence d'échantillonnage et du nombre d'échantillons : $\Delta f = \frac{1}{NT_e}$. Or la durée de l'expérience est $\Delta t_{exp} = NT_e$ donc $\Delta f = \frac{1}{\Delta t_{exp}}$. Le pas fréquentiel est donc plus faible si la durée de l'expérience augmente.

Resumé cours 6

Une chaîne d'acquisition simple peut être modélisée ainsi :



Un capteur délivre un signal à partir d'une grandeur physique. Le signal est conditionné à la sortie du capteur. Ensuite un filtre anti-repliement de spectre élimine les hautes fréquences pour respecter le théorème de Shannon. Le signal est ensuite échantillonné avant d'être converti sous forme numérique (binaire).

Un Convertisseur Analogique Numérique (CAN) peut effectuer un nombre fini de mesures par secondes (la fréquence d'échantillonnage $F_e = \frac{1}{T_e}$ possède une valeur maximale $F_{e,max}$) avec un certain nombre de bits : N_{bits} (soit $2^{N_{bits}}$ valeurs).

Si la chaîne d'acquisition est bien réglée alors la pleine échelle du CAN peut être exploitée.

Pour fixer les ordres de grandeur, il est possible de considérer un tracé sur une feuille A4 verticale (soit 297mm). L'incertitude verticale sera alors $\Delta H = \frac{297}{2^{N_{bits}}}$. Ce qui donne le tableau suivant :

N_{bits}	$2^{N_{bits}}$	ΔH
-	-	mm
1	2	148,5
2	4	74,25
3	8	37,12
4	16	18,56
5	32	9,28
6	64	4,64
7	128	2,32
8	256	1,16
9	512	0,58
10	1024	0,29
11	2048	0,14
12	4096	0,072

N_{bits}	$2^{N_{bits}}$	ΔH
-	-	mm
13	8192	0,036
14	16384	0,018
15	32768	0,0091
16	65536	0,0045
17	131072	0,0022
18	262144	0,0011
19	524288	0,00057
20	1048576	0,00028
21	2097152	0,00014
22	4194304	0,000071
23	8388608	0,000035
24	16777216	0,000018

Pour un tracé sur une feuille A4 en pleine échelle, un CAN 12 bits est déjà « dans l'épaisseur du trait ». De plus au delà de 16bits, pour tirer parti de la précision du CAN, il faut :

- un excellent capteur
- un très bon conditionneur
- un filtre anti-repliement présentant une atténuation négligeable dans les basses fréquences
- ...

Le nombre de bits utilisé pour la quantification doit être cohérent avec la fréquence d'échantillonnage.